

10.10 1)

α) Ο συντελεστής του x είναι ο $\kappa^2 - 4\kappa + 3$ και ο συντελεστής του y είναι ο $-2(\kappa^2 - 1)$. Έχουμε

$$\Delta = 16 - 12 = 4, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \\ \kappa_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = 1 \quad \text{ή} \quad \kappa = 3$$

$$-2(\kappa^2 - 1) = 0 \Rightarrow \kappa^2 - 1 = 0 \Rightarrow \kappa^2 = 1 \Rightarrow \kappa = -1 \quad \text{ή} \quad \kappa = 1$$

Άρα οι συντελεστές των x και y μηδενίζονται ταυτόχρονα για $\kappa = 1$. επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \neq 1$

β) Θεωρούμε δύο τιμές του κ , έστω $\kappa = 0$ και $\kappa = 2$ και τις ευθείες που προκύπτουν

$$\text{για } \kappa = 0 \text{ η (1) γίνεται } (0^2 - 4 \cdot 0 + 3)x - 2(0^2 - 1)y + 8 \cdot 0 - 8 = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 8 = 0 \quad (2)$$

$$\text{για } \kappa = 2 \text{ η (1) γίνεται } (2^2 - 4 \cdot 2 + 3)x - 2(2^2 - 1)y + 8 \cdot 2 - 8 = 0 \Rightarrow -x - 6y + 8 = 0 \quad (3)$$

Θα βρούμε τώρα που τέμνονται οι παραπάνω ευθείες. Γι' αυτό λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)

$$\begin{cases} 3x + 2y - 8 = 0 \\ -x - 6y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{άρα οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο } A(2,1)$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι και οι υπόλοιπες ευθείες της εξίσωσης (1) διέρχονται από το $A(2,1)$

Πράγματι

$$(\kappa^2 - 4\kappa + 3) \cdot 2 - 2(\kappa^2 - 1) \cdot 1 + 8\kappa - 8 = 0 \Leftrightarrow \cancel{2\kappa^2} - \cancel{8\kappa} + 6 - \cancel{2\kappa^2} + 2 + \cancel{8\kappa} - 8 = 0 \text{ που ισχύει}$$

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο το $A(2,1)$

10.10 2)

α) Ο συντελεστής του x είναι ο $(2\kappa - 1)$ και ο συντελεστής του y είναι $\kappa + 2$

$$\text{Έχουμε: } \begin{cases} 2\kappa - 1 = 0 \\ \kappa + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{1}{2} \\ \kappa = -2 \end{cases}$$

Άρα οι συντελεστές δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα

Επομένως η εξίσωση $(2\kappa - 1)x + (\kappa + 2)y - \kappa + 3 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

β) Θεωρούμε δύο τιμές του κ , έστω $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$ και τις ευθείες που προκύπτουν :

$$\text{για } \kappa = 0: (2 \cdot 0 - 1)x + (0 + 2)y - 0 + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x + 2y + 3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{για } \kappa = 1: (2 \cdot 1 - 1)x + (1 + 2)y - 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 3y + 2 = 0 \quad (2)$$

Θα βρούμε τώρα που τέμνονται οι παραπάνω ευθείες.

Γι' αυτό λύνουμε το σύστημα των (1),(2):

$$\begin{cases} -x+2y+3=0 \\ x+3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Άρα οι ευθείες αυτές τέμνονται στο $A(1,-1)$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι και οι υπόλοιπες ευθείες της εξίσωσης διέρχονται από το $A(1,-1)$

Πράγματι: $(2\kappa-1) \cdot 1 - (\kappa+2) - \kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\kappa-1-\kappa-2-\kappa+3=0 \Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το $A(1,-1)$

10.10 3)

α) Έχουμε: $\begin{cases} 3\kappa-2=0 \\ 2\kappa+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa=\frac{2}{3} \\ \kappa=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$ οι συντελεστές των x και y δεν μηδενίζονται

ταυτόχρονα, οπότε η εξίσωση $(3\kappa-2)x + (2\kappa+3)y - 4\kappa - 6 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

β) Έστω $\kappa=0$ και $\kappa=1$ και οι ευθείες που προκύπτουν:

για $\kappa=0$: $(3 \cdot 0 - 2)x + (2 \cdot 0 + 3)y - 4 \cdot 0 - 6 = 0 \Rightarrow -2x + 3y - 6 = 0$

για $\kappa=1$: $(3 \cdot 1 - 2)x + (2 \cdot 1 + 3)y - 4 \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow x + 5y - 10 = 0$

Θα βρούμε τώρα που τέμνονται:

$$\begin{cases} -2x+3y-6=0 \\ x+5y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases}$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι και οι υπόλοιπες ευθείες της εξίσωσης διέρχονται από το $A(0,2)$

Πράγματι: $(3\kappa-2) \cdot 0 + (2\kappa+3) \cdot 2 - 4\kappa - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το $A(0,2)$

10.10 4)

α) Έχουμε: $\begin{cases} \kappa-1=0 \\ 3\kappa+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa=1 \\ \kappa=-\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow$ οι συντελεστές των x και y δεν μηδενίζονται

ταυτόχρονα, οπότε η εξίσωση $(\kappa-1)x - (3\kappa+4)y + 5\kappa + 2 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

β) Έστω $\kappa=1$ και $\kappa=0$ και οι ευθείες που προκύπτουν:

για $\kappa=1$: $-7y + 7 = 0$

για $\kappa=0$: $-x - 4y + 2 = 0$

Θα βρούμε τώρα που τέμνονται:

$$\begin{cases} -7y+7=0 \\ -x-4y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι και οι υπόλοιπες ευθείες της εξίσωσης (1) διέρχονται από το $A(-2,1)$

Πράγματι:

$$(\kappa-1) \cdot (-2) - (3\kappa+4) \cdot 1 + 5\kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\kappa + 2 - 3\kappa - 4 + 5\kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ που ισχύει}$$

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το $A(-2,1)$

10.10 5)

α) Έχουμε: $\begin{cases} \kappa + 3 = 0 \\ 4\kappa - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = -3 \\ \kappa = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{οι συντελεστές των } x \text{ και } y \text{ δεν μηδενίζονται}$

ταυτόχρονα, οπότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

β) Έστω $\kappa = -3$ και $\kappa = 0$ και οι ευθείες που προκύπτουν:

$$\text{για } \kappa = -3: (-3+3)x - (4(-3)+1)y + 5(-3) - 7 = 0 \Leftrightarrow 11y - 22 = 0$$

$$\text{για } \kappa = 0: (0+3)x - (4 \cdot 0 + 1)y + 5 \cdot 0 - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 7 = 0$$

Θα βρούμε τώρα που τέμνονται:

$$\begin{cases} 11y - 22 = 0 \\ 3x - y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι και οι υπόλοιπες ευθείες της εξίσωσης (1)

διέρχονται από το $A(3,2)$

Πράγματι :

$$(\kappa+3) \cdot 3 - (4\kappa+1) \cdot 2 + 5\kappa - 7 = 0 \Leftrightarrow 3\kappa + 9 - 8\kappa - 2 + 5\kappa - 7 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ που ισχύει}$$

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την εξίσωση (1) διέρχονται από

σταθερό σημείο, το $A(3,2)$