

12.Δ1

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3\alpha - 1$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3\alpha - 1$$

Για $x > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} xf(x) &\geq \eta\mu 3x + 5x \xrightarrow{x>0} f(x) \geq \frac{\eta\mu 3x + 5x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 3x + 5x}{x} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3\alpha - 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3\alpha - 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu 3x}{x} + \frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} \right) \Rightarrow 3\alpha - 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 \frac{\eta\mu 3x}{3x} + 5 \right) \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3\alpha - 1 \geq 3 \cdot 1 + 5 \Rightarrow 3\alpha \geq 9 \Rightarrow \alpha \geq 3 \quad (1) \end{aligned}$$

Ενώ για $x < 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} xf(x) &\leq \eta\mu 3x + 5x \xrightarrow{x<0} f(x) \leq \frac{\eta\mu 3x + 5x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 3x + 5x}{x} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3\alpha - 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3\alpha - 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu 3x}{x} + \frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} \right) \Rightarrow 3\alpha - 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3 \frac{\eta\mu 3x}{3x} + 5 \right) \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3\alpha - 1 \leq 3 \cdot 1 + 5 \Rightarrow 3\alpha \leq 9 \Rightarrow \alpha \leq 3 \quad (1) \end{aligned}$$

Από (1), (2) $\Rightarrow \boxed{\alpha = 3}$

12.Δ2

α) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [1, 4] \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 4] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ διατηρεί } \underline{\text{σταθερό πρόσημο}} \text{ στο } [1, 4]$$

Έστω ότι η f διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο $[1, 4]$

Τότε θα είναι

$$\left. \begin{array}{l} f(1) < 0 \\ f(2) < 0 \\ f(4) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) < 0 \quad \underline{\text{άτοπο}} \text{ αφού } f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) = 8$$

οπότε η f διατηρεί θετικό πρόσημο στο $[1, 4]$ δηλαδή είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$

β) Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$, δεν έχει καμία ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$

Άρα θα είναι $f(x) \neq 2$, για κάθε $x \in [1, 4]$. Τότε

Θέτουμε $h(x) = f(x) - 2$ και έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} h \text{ συνεχής στο } [1, 4] \text{ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων} \\ h(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 4] \text{ (διότι } f(x) \neq 2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1, 4]$

Τότε όμως θα είναι

είτε

$$\left. \begin{array}{l} h(1) > 0 \Rightarrow f(1) > 2 \\ h(2) > 0 \Rightarrow f(2) > 2 \\ h(4) > 0 \Rightarrow f(4) > 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{κατά μέλη} \end{array} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) > 8$$

άτοπο αφού $f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) = 8$

είτε

$$\left. \begin{array}{l} h(1) < 0 \Rightarrow f(1) < 2 \\ h(2) < 0 \Rightarrow f(2) < 2 \\ h(4) < 0 \Rightarrow f(4) < 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{κατά μέλη} \end{array} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) < 8$$

άτοπο αφού $f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) = 8$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$

γ) Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x$, δεν έχει καμία ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$

Αρα θα είναι $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in [1, 4]$. Τότε

Θέτουμε $g(x) = f(x) - x$ και έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } [1, 4] \text{ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων} \\ g(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 4] \text{ (διότι } f(x) \neq x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1, 4]$

Τότε όμως θα είναι

είτε

$$\left. \begin{array}{l} g(1) > 0 \Rightarrow f(1) - 1 > 0 \Rightarrow f(1) > 1 \\ g(2) > 0 \Rightarrow f(2) - 2 > 0 \Rightarrow f(2) > 2 \\ g(4) > 0 \Rightarrow f(4) - 4 > 0 \Rightarrow f(4) > 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{κατά μέλη} \end{array} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) > 8$$

άτοπο αφού $f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) = 8$

είτε

$$\left. \begin{array}{l} g(1) < 0 \Rightarrow f(1) - 1 < 0 \Rightarrow f(1) < 1 \\ g(2) < 0 \Rightarrow f(2) - 2 < 0 \Rightarrow f(2) < 2 \\ g(4) < 0 \Rightarrow f(4) - 4 < 0 \Rightarrow f(4) < 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{κατά μέλη} \end{array} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) < 8$$

άτοπο αφού $f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) = 8$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$

12.Λ3

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ Αν } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} &\Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \xrightarrow{f(f(x))=x+f(x)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 + f(x_1) = x_2 + f(x_2) \xrightarrow{f(x_1)=f(x_2)} \boxed{x_1 = x_2} \end{aligned}$$

$$\beta) f(f(x)) = x + f(x) \xrightarrow{x=0} f(f(0)) = f(0) \xrightarrow{f:1-1} f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma) f(f(x)) &= x + f(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} f(f(f^{-1}(x))) = f^{-1}(x) + f(f^{-1}(x)) \Rightarrow \\ &\xrightarrow{f(f^{-1}(x))} f(x) = f^{-1}(x) + x \end{aligned}$$

$$\delta) f^{-1}(2f(x) + 3) = f(5) - 5 \xrightarrow{f^{-1}(x)=f(x)-x \Rightarrow f^{-1}(5)=f(5)-5} f^{-1}(2f(x) + 3) = f^{-1}(5) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{f^{-1}:1-1} 2f(x) + 3 = 5 \Rightarrow 2f(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 1 \xrightarrow{f(8)=1} f(x) = f(8) \xrightarrow{f:1-1} x = 8$$

12.Δ4

$$\alpha) \text{ Αν } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2) \xrightarrow{f^3(x)=x^3+2-f(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^3 + 2 - f(x_1) = x_2^3 + 2 - f(x_2) \xrightarrow{f(x_1)=f(x_2)} x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Οπότε η f είναι 1-1 άρα αντιστρέψιμη

β) Έχουμε ότι

$$f^3(x) + f(x) = x^3 + 2 \xrightarrow{x=-2} f^3(-2) + f(-2) = (-2)^3 + 2 \Rightarrow f^3(-2) + f(-2) = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-2)[f^2(-2) + 1] = -6 \xrightarrow{f^2(-2)+1 \neq 0} f(-2) = \frac{-6}{f^2(-2)+1} \xrightarrow{f^2(-2)+1 > 0} \boxed{f(-2) < 0}$$

Ακόμη

$$f^3(x) + f(x) = x^3 + 2 \xrightarrow{x=2} f^3(2) + f(2) = 2^3 + 2 \Rightarrow f^3(2) + f(2) = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2)[f^2(2) + 1] = 10 \xrightarrow{f^2(2)+1 \neq 0} f(2) = \frac{10}{f^2(2)+1} \xrightarrow{f^2(2)+1 > 0} \boxed{f(2) > 0}$$

Επομένως η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 2]$ και

$$f(-2)f(2) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-2, 2)$ η οποία θα είναι και μοναδική αφού η f είναι 1-1

$$\gamma) f^3(x) + f(x) = x^3 + 2 \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} f^3(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(x)) = [f^{-1}(x)]^3 + 2 \xrightarrow{f(f^{-1}(x))=x} \Rightarrow$$

$$x^3 + x = [f^{-1}(x)]^3 + 2 \Rightarrow [f^{-1}(x)]^3 = x^3 + x - 2 \quad (1)$$

Τώρα χρειάζεται να βρούμε το πρόσημο του $x^3 + x - 2$. Έτσι

$$x^3 + x - 2 \geq 0 \xleftrightarrow{\text{παραγοντοποίηση με Homer}} (x-1)(x^2 + x + 2) \geq 0 \xleftrightarrow{\substack{x^2+x+2 > 0 \\ \text{διότι } \Delta < 0}} x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Δηλαδή για $x \geq 1$ είναι $x^3 + x - 2 \geq 0$ και $x \leq 1$ είναι $x^3 + x - 2 \leq 0$

Οπότε

$$(1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 + x - 2} & , x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{-(x^3 + x - 2)} & , x < 1 \end{cases}$$

α) Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} f(x+3) + f(x-1) &= f(x+1) + x \xrightarrow{x=4} f(7) + f(3) = f(5) + 4 \\ f(x+3) + f(x-1) &= f(x+1) + x \xrightarrow{x=6} f(9) + f(5) = f(7) + 6 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \cancel{f(7)} + f(3) + f(9) + \cancel{f(5)} = \cancel{f(5)} + 4 + \cancel{f(7)} + 6 \Rightarrow \boxed{f(3) + f(9) = 10}$$

β) • Αν $f(3) = f(9)$ τότε $f(3) + f(9) = 10 \Rightarrow 2f(3) = 10 \Rightarrow f(3) = 5$ οπότε για $\xi = 3$ έχουμε $f(\xi) = 5$

• Έστω $f(3) < f(9)$. Τότε

$$f(3) < f(9) \Rightarrow f(3) + f(3) < f(9) + f(3) \Rightarrow 2f(3) < 10 \Rightarrow f(3) < 5 \quad (1)$$

και

$$f(3) < f(9) \Rightarrow f(3) + f(9) < f(9) + f(9) \Rightarrow 10 < 2f(9) \Rightarrow f(9) > 5 \quad (2)$$

Οπότε

$$(1), (2) \Rightarrow f(3) < 5 < f(9)$$

Έτσι

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[3, 9]$

$$f(3) < 5 < f(9)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (3, 9)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 5$

• Αν $f(3) > f(9)$. Τότε ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (3, 9)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 5$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) = 5$

12.Δ6

α) Έχουμε ότι

$$x^2 \leq 2f(x) \leq x^2 + 1 \xrightarrow{x=0} 0^2 \leq 2f(0) \leq 0^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq 2f(0) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$x^2 \leq 2f(x) \leq x^2 + 1 \xrightarrow{x=1} 1^2 \leq 2f(1) \leq 1^2 + 1 \Rightarrow 1 \leq 2f(1) \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(1) \leq 1 \quad (2)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= f(0) \stackrel{(1)}{\geq} 0 \\ h(1) &= f(1) - 1 \stackrel{(2)}{\leq} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{h(0)h(1) \leq 0}$$

Αν $h(0) = 0$ τότε για $\xi = 0 \in [0, 1]$ έχουμε $h(\xi) = 0$

Αν $h(1) = 0$ τότε για $\xi = 1 \in [0, 1]$ έχουμε $h(\xi) = 0$

Αν $h(0) \neq 0$ και $h(1) \neq 0$ τότε προφανώς $h(0)h(1) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ (άρα $\xi \in [0,1]$) τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi) = \xi}$

β) Έχουμε ότι

$$x^2 \leq 2f(x) \leq x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \overset{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \leq 2f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x^2} + 1 \quad \Rightarrow \quad \overset{\text{διαιρούμε με 2}}{\frac{1}{2x^2}} \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x^2} \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{πολλαπλασιάζουμε με } x^2 > 0}{\Rightarrow} \cancel{x^2} \frac{1}{2\cancel{x^2}} \leq x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \cancel{x^2} \frac{1}{2\cancel{x^2}} + x^2 \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1+x^2}{2}$$

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \leq x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1+x^2}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

γ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \eta\mu 3x}{x^2 + \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3}^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\eta\mu 3x}{x}}{\frac{x^2}{\cancel{x}} + \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\frac{1}{2} + 3}{0 + 1} = \boxed{\frac{7}{2}}$$

12.Δ7

α)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}^2 - 2^2}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 \cancel{x - 2}}{(\cancel{x - 2})(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{2+2} + 2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x - 2)}{x - 2} \overset{\text{θέτουμε } y = x - 2}{=} \overset{\text{όταν } x \rightarrow 2, y \rightarrow 0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta\mu y}{y} = \boxed{1}$$

β) Θετούμε $h(x) = f(x) \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \frac{1}{4}$ και έχουμε

$$h(x) = f(x) \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \Rightarrow f(x) = \frac{h(x)}{\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}}$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}} \quad \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{1}{4} \end{matrix} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$$

και επειδή η f είναι συνεχής θα είναι $\boxed{f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1}$

Ακόμη Θέτουμε $\varphi(x) = g(x) + \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = \frac{3}{2}$ και έχουμε

$$\varphi(x) = g(x) + \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \Rightarrow g(x) = \varphi(x) - \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\varphi(x) - \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \quad \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} = 1 \end{matrix} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

και επειδή η g είναι συνεχής θα είναι $\boxed{g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{1}{2}}$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $z: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{με } z(x) = f(x)(x-2) + f^2(x)(x-2) - g(x)$$

Η συνάρτηση z

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} z(2) &= f(2)(2-2) + f^2(2)(2-2) - g(2) = -g(2) = -1 < 0 \\ z(3) &= f(3)(3-2) + f^2(3)(3-2) - g(3) = f^2(3) + f(3) - g(3) \stackrel{\text{επεξήγηση 1}}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z(2)z(3) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε

$$z(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0)(x_0-2) + f^2(x_0)(x_0-2) - g(x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0)(x_0-2) + f^2(x_0)(x_0-2) = g(x_0) \stackrel{x_0 \neq 2}{\Rightarrow} \boxed{f(x_0) + f^2(x_0) = \frac{g(x_0)}{x_0-2}}$$

επεξήγηση 1

$$f(x) \neq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \neq 0$$

Οπότε αν $s(x) = f(x) - g(x)$ τότε

$$\left. \begin{aligned} s: \text{συνεχής στο } \mathbb{R} \\ s(x) \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } s \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \quad \left. \begin{aligned} s(2) &= f(2) - g(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{οπότε } s(3) > 0 \Rightarrow \boxed{f(3) - g(3) > 0}$$

$$\text{Άρα } z(3) = f^2(3) + f(3) - g(3) \stackrel{\substack{f^2(3) \geq 0 \\ f(3) - g(3) > 0}}{\Rightarrow} z(3) > 0$$

12.Δ8

$$\alpha) \quad f(x + f(y)) = f(x) + y + 1 \stackrel{\substack{x=0 \\ y=x}}{=} f(f(x)) = f(0) + x + 1 \quad (1) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε

Αν

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \cancel{f(0)} + x_1 + 1 = \cancel{f(0)} + x_2 + 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1

$$\beta) \quad f(x + f(y)) = f(x) + y + 1 \stackrel{\text{θέτουμε } y = f^{-1}(x)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x + f(f^{-1}(x))) = f(f^{-1}(x)) + f^{-1}(x) + 1 \stackrel{f(f^{-1}(x)) = x}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x + x) = x + f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow \boxed{f(2x) = x + f^{-1}(x) + 1}$$

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$f(2x) = f(x) + f^{-1}(x) + 1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f^{-1}(0) + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(0) = -1} \Rightarrow \boxed{f(-1) = 0}$$

δ) Έστω ότι η f είναι περιττή. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Όμως

$$f(-x) = f(x) \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f(-1) = f(1) \stackrel{f(-1)=0}{\Rightarrow} f(1) = 0. \text{ Άρα } f(1) = f(-1) = 0 \text{ άτοπο διότι η } f \text{ είναι } 1-1$$

12.Δ9

Έχουμε

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - y \stackrel{y=x}{\Rightarrow} \cancel{f(x)} - \cancel{f(x)} = f(f(x)) - x \Rightarrow$$

$$f(0) = f(f(x)) - x \Rightarrow \boxed{f(f(x)) = x + f(0)} \quad (1)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι 1-1. Πράγματι

$$\text{Αν } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \stackrel{f(f(x)) = x + f(0)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x_1 + \cancel{f(0)} = x_2 + \cancel{f(0)} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 και άρα υπάρχει η f^{-1}

Ακόμη

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - y \stackrel{x=y=0}{\Rightarrow} f(f(0) - f(0)) = f(f(0)) - 0 \Rightarrow f(f(0)) = f(0)$$

$$f(f(0)) = f(0) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} \boxed{f(0) = 0}$$

Επίσης

$$(1) \Rightarrow f(f(x)) = x + f(0) \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} f(f(x)) = x \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(f(f^{-1}(x))) = f^{-1}(x) \Rightarrow \boxed{f(x) = f^{-1}(x)}$$

Τέλος

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - y \xrightarrow[y=x]{x=0} f(f(0) - f(x)) = f(f(0)) - x \xrightarrow[f(f(0))=f(0)=0]{f(0)=0} \Rightarrow$$

$$f(-f(x)) = -x \Rightarrow f^{-1}(f(-f(x))) = f^{-1}(-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f(x) = f^{-1}(-x) \xrightarrow{f^{-1}(x)=f(x)} \boxed{-f(x) = f(-x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

που σημαίνει ότι η f είναι περιττή

12.Δ10

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f(f(x)) = x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f(f(0)) = 0$$

$$\text{Έστω } 0 < f(0)$$

$$\text{Θεωρούμε την συνάρτηση } h \text{ με } h(x) = f(x) - x$$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, f(0)]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= f(0) \\ h(f(0)) &= f(f(0)) - f(0) \stackrel{f(f(0))=0}{=} -f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(0) \cdot h(f(0)) = -f^2(0) \Rightarrow \boxed{h(0) \cdot h(f(0)) \leq 0}$$

$$\text{Αν } h(0) = 0 \text{ τότε για } \xi = 0 \text{ έχουμε } h(\xi) = 0$$

$$\text{Αν } h(f(0)) = 0 \text{ τότε για } \xi = f(0) \text{ έχουμε } h(\xi) = 0$$

Αν $h(0) \neq 0$ και $h(f(0)) \neq 0$ τότε προφανώς $h(0)h(f(0)) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, f(0))$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi) = \xi}$$

12.Δ11

Έχουμε

$$x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} 0 \leq f(0) \leq 1$$

$$x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=2} 4 \leq f(2) \leq 5$$

$$x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=-2} 4 \leq f(-2) \leq 5$$

Οπότε

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$

$$\left. \begin{aligned} 4 \leq f(-2) \leq 5 \\ 0 \leq f(0) \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) \leq 1 < 3 < 4 \leq f(-2) \Rightarrow f(0) < 3 < f(-2)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει $x_1 \in (-2, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = 3$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq f(0) \leq 1 \\ 4 \leq f(2) \leq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \leq 1 < 3 < 4 \leq f(2) \Rightarrow f(0) < 3 < f(2)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει $x_2 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_2) = 3$$

Άρα $x_1 \neq x_2$ (προφανώς) και $f(x_1) = f(x_2) = 3$ που σημαίνει ότι η f δεν είναι 1-1

12.Δ12

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η f είναι 1-1. Πράγματι

$$\begin{aligned} \text{Αν } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} &\Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow x_1 + f(x_1) = x_2 + f(x_2) \xRightarrow{f(x_1)=f(x_2)} \boxed{x_1 = x_2} \\ &\Rightarrow \cancel{10x_1x_2} + 8x_1 - 5x_2 \cancel{= 4} = \cancel{10x_2x_1} + 8x_2 - 5x_1 \cancel{= 4} \Rightarrow 13x_1 = 13x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι 1-1 άρα υπάρχει η αντίστροφη της. Οπότε

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= x + f(x) \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ την } f^{-1}(x)} f(f(f^{-1}(x))) = f^{-1}(x) + f(f^{-1}(x)) \xRightarrow{f(f^{-1}(x))=x} \\ &\Rightarrow f(x) = f^{-1}(x) + x \Rightarrow f(x) - x = f^{-1}(x) \Rightarrow f(f(x) - x) = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{f(f(x) - x) = f(f^{-1}(x))} \end{aligned}$$

12.Δ13

α) Αν $\boxed{f(x_1) = f(x_2)}$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2) \xRightarrow{\text{προσθέτουμε 5}} \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + 2f(x_1) + 5 = f^3(x_2) + 2f(x_2) + 5 \xRightarrow{f^3(x) + 2f(x) + 5 = x} \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1

$$\beta) \quad f^3(x) + 2f(x) + 5 = x \xRightarrow{x=2} f^3(2) + 2f(2) + 5 = 2 \Rightarrow f^3(2) + 2f(2) + 3 = 0 \xRightarrow{\text{θέτουμε } y=f(2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3 + 2y + 3 = 0 \xRightarrow{\text{παραγοντοποίηση με horner ρίζα του } y_0 = -1} (y+1)(y^2 - y + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$y = -1 \quad \text{ή} \quad y^2 - y + 3 = 0 \quad \text{αδύνατη διότι } \Delta = 1 - 12 < 0$$

$$\text{Άρα } y = -1 \Rightarrow f(2) = -1$$

γ) Επειδή η f είναι 1-1 υπάρχει η $f^{-1}(x)$ και

$$f^3(x) + 2f(x) + 5 = x \quad \Rightarrow \quad f^3(f^{-1}(x)) + 2f(f^{-1}(x)) + 5 = f^{-1}(x) \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = x^3 + 2x + 5$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 1}{f(x) + 1} & \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y) \\ \text{όταν } x \rightarrow 2 \quad y \rightarrow f(2)=-1}}{=} \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y + f^{-1}(y) - 1}{y + 1} \stackrel{f^{-1}(x)=x^3+2x+5}{=} \\ & = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y + y^3 + 2y + 5 - 1}{y + 1} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y^3 + 3y + 4}{y + 1} \stackrel{\substack{\text{παραγοντοποίηση με horner} \\ \text{ρίζα το } y_0 = -1}}{=} \\ & = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{(y+1)(y^2 - y + 4)}{y+1} = 1 + 1 + 4 = \boxed{6} \end{aligned}$$

12.Δ14

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \overset{\text{υψώνουμε σε περιττή δύναμη}}{x_1^3 < x_2^3} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \xrightarrow{e^x \nearrow} e^{x_1+2} < e^{x_2+2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$x_1^3 + e^{x_1+2} < x_2^3 + e^{x_2+2} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε 1}} x_1^3 + e^{x_1+2} + 1 < x_2^3 + e^{x_2+2} + 1 \Rightarrow \boxed{g(x_1) < g(x_2)}$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα

β) Επειδή η g είναι 1-1 υπάρχει η $g^{-1}(x)$. Έτσι

$$f(g(x)) = x + 2 \quad \Rightarrow \quad \overset{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } g^{-1}(x)}{f(g(g^{-1}(x))) = g^{-1}(x) + 2} \Rightarrow f(x) = g^{-1}(x) + 2$$

Οπότε αν $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \boxed{f(x_1) = f(x_2)} & \Rightarrow g^{-1}(x_1) + 2 = g^{-1}(x_2) + 2 \Rightarrow g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2) \Rightarrow \\ & \Rightarrow g(g^{-1}(x_1)) = g(g^{-1}(x_2)) \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι 1-1

γ) $f(g(x)) = x + 2 \Rightarrow f^{-1}(f(g(x))) = f^{-1}(x + 2) \Rightarrow g(x) = f^{-1}(x + 2) \Rightarrow$

$$g(x) = f^{-1}(x + 2) \xrightarrow{g(x)=x^3+e^{x+2}+1} f^{-1}(x + 2) = x^3 + e^{x+2} + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } y=x+2 \Rightarrow x=y-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(y) = (y-2)^3 + e^y + 1}$$

12.Δ15

α) Έχουμε

$$f^3(x) + f(x) = 2x^3 + 1 \quad \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=-1} f^3(-1) + f(-1) = 2(-1)^3 + 1 \Rightarrow$$

$$f(-1)[f^2(-1)+1] = -1 \stackrel{f^2(-1)+1 \neq 0}{\Rightarrow} f(-1) = \frac{-1}{f^2(-1)+1} \stackrel{\begin{smallmatrix} -1 < 0 \\ f^2(-1)+1 > 0 \end{smallmatrix}}{\Rightarrow} f(-1) < 0$$

Ακόμη

$$f^3(x) + f(x) = 2x^3 + 1 \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f^3(0) + f(0) = 2 \cdot 0^3 + 1 \Rightarrow$$

$$f(0)[f^2(0)+1] = 1 \stackrel{f^2(0)+1 \neq 0}{\Rightarrow} f(0) = \frac{1}{f^2(0)+1} \stackrel{\begin{smallmatrix} 1 > 0 \\ f^2(0)+1 > 0 \end{smallmatrix}}{\Rightarrow} f(0) > 0$$

Επομένως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) < 0 \\ f(0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο $(-1, 0)$

Η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1

β) Έστω $x_0 \in (-1, 0)$ η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος. Θα ισχύει προφανώς $f(x_0) = 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(-f(x)) - f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

Καταρχήν θα δείξουμε ότι η h είναι γνησίως μονότονη

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) > -f(x_2) \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) > -f(x_2) \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(-f(x_1)) > f(-f(x_2)) \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1) (2) και (3) κατά μέλη έχουμε

$$f(-f(x_1)) - f(x_1) - x_1 > f(-f(x_2)) - f(x_2) - x_2 \Rightarrow \boxed{h(x_1) > h(x_2)}$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα

Ακόμη είναι

$$h(x_0) = f(-f(x_0)) - f(x_0) - x_0 \stackrel{f(x_0)=0}{\Rightarrow} h(x_0) = f(0) - x_0 \stackrel{\begin{smallmatrix} f(0) > 0 \\ x_0 < 0 \text{ διότι } x_0 \in (-1, 0) \\ \Rightarrow -x_0 > 0 \end{smallmatrix}}{\Rightarrow} h(x_0) > 0$$

και

$$h(0) = f(-f(0)) - f(0) \Rightarrow h(0) < 0 \quad \text{διότι } f(0) > 0 \Rightarrow -f(0) < 0 \Rightarrow$$

$$\stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(-f(0)) < f(0)$$

Επομένως

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[x_0, 0]$

$$\left. \begin{array}{l} h(x_0) > 0 \\ h(0) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(x_0) \cdot h(0) < 0$$

Οπότε , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano , εξίσωση $h(x) = 0$, άρα και η $f(-f(x)) = f(x) + x$ έχει ρίζα στο $(x_0, 0)$, άρα και στο $(-1, 0)$. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική διότι η h είναι γνησίως φθίνουσα