

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

10.16 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x^2) - f(1) - x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(-1) &= f((-1)^2) - f(1) - (-1) = \cancel{f(1)} - \cancel{f(1)} + 1 = 1 > 0 \\ h(1) &= f(1^2) - f(1) - 1 = \cancel{f(1)} - \cancel{f(1)} - 1 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(-1)h(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi^2) - f(1) - \xi = 0 \Rightarrow \boxed{f(\xi^2) - f(1) = \xi}$$

10.16 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = xf^2(x) + x - 3$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= 0 \cdot f^2(0) + 0 - 3 = -3 < 0 \\ h(3) &= 3 \cdot f^2(3) + 3 - 3 = 3f^2(3) \stackrel{f(3) \neq 0}{<} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0)h(3) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f^2(\xi) + \xi - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\xi f^2(\xi) = 3 - \xi}$$

10.16 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x^2) - f(2x) + x - 1$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= \cancel{f(0)} - \cancel{f(0)} + 0 - 1 = -1 < 0 \\ h(2) &= \cancel{f(4)} - \cancel{f(4)} + 2 - 1 = 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0)h(2) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi^2) - f(2\xi) + \xi - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f(\xi^2) - f(2\xi) = 1 - \xi}$$