

4.12 1)

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -6x_1 + 1 = -6x_2 + 1 \Rightarrow \cancel{-6}x_1 = \cancel{-6}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow -6x + 1 = y \Rightarrow -6x = y - 1 \Rightarrow x = -\frac{y-1}{6}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = -\frac{x-1}{6}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

4.12 2)

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow \cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow 2x + 3 = y \Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

4.12 3)

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4x_1 - 7 = 4x_2 - 7 \Rightarrow \cancel{4}x_1 = \cancel{4}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow 4x - 7 = y \Rightarrow 4x = y + 7 \Rightarrow x = \frac{y+7}{4}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

4.12 4)

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow -3x_1 - 5 = -3x_2 - 5 \Rightarrow -3x_1 = -3x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow -3x - 5 = y \Rightarrow -3x = y + 5 \Rightarrow x = -\frac{y+5}{3}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $\boxed{f^{-1}(x) = -\frac{x+5}{3}}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

4.12 5)

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow e^{x_1} + 4 = e^{x_2} + 4 \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $(4, +\infty)$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow e^x + 4 = y \Rightarrow e^x = y - 4 \Rightarrow \ln e^x = \ln(y - 4) \Rightarrow x = \ln(y - 4)$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $\boxed{f^{-1}(x) = \ln(y - 4)}$ με πεδίο ορισμού το $(4, +\infty)$

4.12 6)

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow e^{4x_1-3} - 2 = e^{4x_2-3} - 2 \Rightarrow e^{4x_1-3} = e^{4x_2-3} \Rightarrow 4x_1 - 3 = 4x_2 - 3 \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $(-2, +\infty)$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow e^{4x-3} - 2 = y \Rightarrow e^{4x-3} = y + 2 \Rightarrow \ln e^{4x-3} = \ln(y + 2) \Rightarrow 4x - 3 = \ln(y + 2) \Rightarrow 4x = \ln(y + 2) + 3 \Rightarrow x = \frac{\ln(y + 2) + 3}{4}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+2)+3}{4}$ με πεδίο ορισμού το
 $(-2, +\infty)$

4.12 7)

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \cancel{2} + \ln(x_1 - 3) = \cancel{2} + \ln(x_2 - 3) \Rightarrow \ln(x_1 - 3) = \ln(x_2 - 3) \xrightarrow{\ln x: 1-1} \\ &\Rightarrow x_1 - \cancel{3} = x_2 - \cancel{3} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \end{aligned}$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow 2 + \ln(x - 3) = y \Rightarrow \ln(x - 3) = y - 2 \Rightarrow e^{\ln(x-3)} = e^{y-2} \Rightarrow x - 3 = e^{y-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{x = e^{y-2} + 3} \end{aligned}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = e^{x-2} + 3$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

4.12 8)

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \cancel{5} - \ln(2x_1 + 1) = \cancel{5} - \ln(2x_2 + 1) \Rightarrow \ln(2x_1 + 1) = \ln(2x_2 + 1) \xrightarrow{\ln x: 1-1} \\ &\Rightarrow 2x_1 + \cancel{1} = 2x_2 + \cancel{1} = 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \end{aligned}$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow 2 + \ln(x - 3) = y \Rightarrow 5 - \ln(2x + 1) = y \Rightarrow -\ln(2x + 1) = y - 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln(2x + 1) = 5 - y \Rightarrow e^{\ln(2x+1)} = e^{5-y} \Rightarrow 2x + 1 = e^{5-y} \Rightarrow 2x = e^{5-y} - 1 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{e^{5-y} - 1}{2}} \end{aligned}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = \frac{e^{5-x} - 1}{2}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

4.12 9)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{3x_1 - 2}{x_1} = \frac{3x_2 - 2}{x_2} \Rightarrow (3x_1 - 2)x_2 = (3x_2 - 2)x_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cancel{3x_1x_2} - 2x_2 = \cancel{3x_2x_1} - 2x_1 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \end{aligned}$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{3x-2}{x} = y \Rightarrow 3x-2 = xy \Rightarrow 3x-xy = 2 \Rightarrow x(3-y) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3-y}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = \frac{2}{3-x}$ με πεδίο ορισμού το
 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

4.12 10)

Παρατηρούμε ότι $\left. \begin{array}{l} f(1) = 2 - 3 \cdot 1^2 = -1 \\ f(-1) = 2 - 3 \cdot (-1)^2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = f(-1)$. Οπότε η f δεν είναι αντιστρέψιμη

4.12 11)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $[2, +\infty)$. Ακόμη επειδή $\sqrt[3]{x-2} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt[3]{x-2} \geq 1$ η f έχει σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow 1 + \sqrt[3]{x_1-2} = 1 + \sqrt[3]{x_2-2} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1-2} = \sqrt[3]{x_2-2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[1, +\infty)$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow 1 + \sqrt[3]{x-2} = y \Rightarrow \sqrt[3]{x-2} = y-1 \Rightarrow \sqrt[3]{x-2}^3 = (y-1)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2 = (y-1)^3 \Rightarrow x-2 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \Rightarrow x = y^3 - 3y^2 + 3y + 1$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ με πεδίο ορισμού το
 $[1, +\infty)$

4.12 12)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Ακόμη όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των παραγώγων, η f έχει σύνολο τιμών το $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$

Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}-1}{\sqrt{x_1}+2} = \frac{\sqrt{x_2}-1}{\sqrt{x_2}+2} \Rightarrow (\sqrt{x_1}-1)(\sqrt{x_2}+2) = (\sqrt{x_2}-1)(\sqrt{x_1}+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - 2 = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x_1} = 3\sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = y \Rightarrow y\sqrt{x} + 2y = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow y\sqrt{x} - \sqrt{x} = -1 - 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(y-1) = -1-2y \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-1-2y}{y-1} \Rightarrow \sqrt{x}^2 = \left(\frac{-1-2y}{y-1}\right)^2 \Rightarrow x = \left(\frac{-1-2y}{y-1}\right)^2$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = \left(\frac{-1-2x}{y-1}\right)^2 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^2}$ με

πεδίο ορισμού το $\boxed{\left[-\frac{1}{2}, 1\right)}$

4.12 13)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Καταρχήν θα εξετάσουμε αν η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή αν είναι 1-1

Έχουμε ότι αν

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ (θα μάθουμε να το βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)

Θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης

Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow x^3 + 1 = y \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y-1}, & \text{αν } y \geq 1 \\ x = -\sqrt[3]{1-y}, & \text{αν } y < 1 \end{cases}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $\boxed{f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x}, & \text{αν } x < 1 \end{cases}}$ με πεδίο ορισμού
το $\mathbb{R}$