

1η περίπτωση: η f είναι γνησίως αύξουσα

Τότε

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{f \nearrow} f(x_1) < f(x_2) \xRightarrow{f \nearrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$$

Αρα η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα

2η περίπτωση: η f είναι γνησίως φθίνουσα

Τότε

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{f \searrow} f(x_1) > f(x_2) \xRightarrow{f \searrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$$

Αρα η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα

Οπότε **σε κάθε περίπτωση** η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα