

Έχουμε ισοδύναμα

$$(\beta+1)^{\alpha} < (\alpha+1)^{\beta} \Leftrightarrow \ln(\beta+1)^{\alpha} < \ln(\alpha+1)^{\beta} \Leftrightarrow \alpha \ln(\beta+1) < \beta \ln(\alpha+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha \ln(\beta+1)}{\beta} < \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι  $\frac{\ln(\beta+1)}{\beta} < \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha}$  για  $0 < \alpha < \beta$ . Οπότε

θεωρούμε την συνάρτηση  $h$  με  $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ ,  $x > 0$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν η παράσταση  $x - (x+1)\ln(x+1)e^x - 1 - x$  είναι θετική ή αρνητική θα ασχοληθούμε τώρα με αυτό. Έτσι

Θεωρούμε την συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$ ,  $x \geq 0$

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$  και για κάθε  $x > 0$  είναι

$$g'(x) = 1 - \left[ \ln(x+1) + \cancel{(x+1)} \frac{1}{\cancel{x+1}} \right] = 1 - \ln(x+1) - 1 = -\ln(x+1)$$

$x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow \ln(x+1) > \ln 1 \Rightarrow \ln(x+1) > 0$

Οπότε η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$ . Άρα

$$x > 0 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(0) \Rightarrow x - (x+1)\ln(x+1) < 0 - (0+1)\ln(0+1) \Rightarrow x - (x+1)\ln(x+1) < 0 \quad (1)$$

$$\text{Επομένως για κάθε } x > 0 \text{ είναι } h'(x) = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} \stackrel{(1)}{<} 0$$

οπότε η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ . Άρα

$$0 < \alpha < \beta \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha} > \frac{\ln(\beta+1)}{\beta} \text{ που είναι ισοδύναμη με την σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε}$$

Έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} < \frac{\alpha}{\beta} \stackrel{\alpha > 0, \varepsilon\varphi\beta > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\beta}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι  $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\beta}$  για  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ . Οπότε θεωρούμε

την συνάρτηση  $h$  με  $h(x) = \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{\sin^2 x} x - \varepsilon \phi x}{x^2} = \frac{\frac{x}{\sin^2 x} - \eta \mu x}{x^2} = \frac{\frac{x - \eta \mu x \sin x}{\sin^2 x}}{x^2} = \frac{x - \eta \mu x \sin x}{x^2 \sin^2 x}$$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση g με  $g(x) = x - \eta \mu x \sin x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  και για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι

$$g'(x) = 1 - \sin^2 x + \eta \mu^2 x = 2\eta \mu^2 x > 0$$

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ . Άρα

$$x > 0 \stackrel{g'}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Rightarrow x - \eta \mu x \sin x > 0 - \eta \mu 0 \sin 0 \Rightarrow x - \eta \mu x \sin x > 0 \quad (1)$$

Επομένως για κάθε  $x > 0$  είναι  $h'(x) = \frac{x - \eta \mu x \sin x}{x^2 \sin^2 x} \stackrel{(1)}{>} 0$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ . Άρα

$$0 < \boxed{\alpha < \beta} \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(\alpha) < h(\beta) \Rightarrow \boxed{\frac{\varepsilon \phi \alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon \phi \beta}{\beta}}$$

## 23.27 3)

Έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \beta^{\alpha-1} \leq \alpha^{\beta-1} &\Leftrightarrow \ln \beta^{\alpha-1} \leq \ln \alpha^{\beta-1} \Leftrightarrow (\alpha-1) \ln \beta \leq (\beta-1) \ln \alpha \stackrel{\substack{\alpha-1>0 \\ \beta-1>0}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln \beta}{\beta-1} \leq \frac{\ln \alpha}{\alpha-1} \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι  $\boxed{\frac{\ln \beta}{\beta-1} \leq \frac{\ln \alpha}{\alpha-1}}$  για  $1 < \alpha \leq \beta$ . Οπότε θεωρούμε την

συνάρτηση h με  $h(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ ,  $x > 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  με

$$h'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1-x \ln x}{x}}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}$$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση g με  $g(x) = x-1-x \ln x$ ,  $x \geq 1$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, +\infty)$  και για κάθε  $x > 1$  είναι

$$g'(x) = 1 - \left( \ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} \right) = \cancel{x} - \ln x - \cancel{x} = -\ln x$$

Οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ . Άρα

$$x > 1 \stackrel{g'}{\Rightarrow} g(x) < g(1) \Rightarrow x-1-x \ln x < 1-1-1 \ln 1 \Rightarrow x-1-x \ln x < 0 \quad (1)$$

Επομένως για κάθε  $x > 1$  είναι  $h'(x) = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2} \stackrel{(1)}{<} 0$

οπότε η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(1, +\infty)$ . Άρα

$$1 < \boxed{\alpha \leq \beta} \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(\alpha) \geq h(\beta) \Rightarrow \boxed{\frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} \geq \frac{\ln \beta}{\beta - 1}}$$

### 23.27 4)

Έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha\beta} &\Leftrightarrow \ln \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < \ln \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha\beta} \Leftrightarrow \ln \beta^\beta - \ln \alpha^\alpha < \alpha\beta \ln \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha < \alpha\beta (\ln \beta - \ln \alpha) \Leftrightarrow \beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha < \alpha\beta \ln \beta - \alpha\beta \ln \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta \ln \beta - \alpha\beta \ln \beta < \alpha \ln \alpha - \alpha\beta \ln \alpha \Leftrightarrow \beta \ln \beta (1 - \alpha) < \alpha \ln \alpha (1 - \beta) \stackrel{(1-\alpha)(1-\beta) > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta \ln \beta}{1 - \beta} < \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι  $\boxed{\frac{\beta \ln \beta}{1 - \beta} < \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha}}$  για  $1 < \alpha < \beta$ . Οπότε θεωρούμε την

$$\text{συνάρτηση } h \text{ με } h(x) = \frac{x \ln x}{1 - x}, \quad x > 1$$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  με

$$h'(x) = \frac{\left(\ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}}\right)(1 - x) + x \ln x}{(x - 1)^2} = \frac{\ln x - \cancel{x \ln x} + 1 - x + \cancel{x \ln x}}{(x - 1)^2} = \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2}$$

Επειδή  $\ln x \leq x - 1$  (με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 1$ ) θα είναι  $h'(x) \leq 0$ , με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για  $x = 1$ , οπότε η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(1, +\infty)$ . Άρα

$$1 < \boxed{\alpha < \beta} \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} > \frac{\beta \ln \beta}{1 - \beta}}$$

### 23.27 5)

Έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \beta\alpha^\beta > \alpha\beta^\alpha &\Leftrightarrow \ln(\beta\alpha^\beta) > \ln(\alpha\beta^\alpha) \Leftrightarrow \ln \beta + \ln \alpha^\beta > \ln \alpha + \ln \beta^\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln \beta + \beta \ln \alpha > \ln \alpha + \alpha \ln \beta \Leftrightarrow \beta \ln \alpha - \ln \alpha > \alpha \ln \beta - \ln \beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\beta - 1) \ln \alpha > (\alpha - 1) \ln \beta \stackrel{\substack{\alpha - 1 > 0 \\ \beta - 1 > 0}}{\Leftrightarrow} \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} > \frac{\ln \beta}{\beta - 1} \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι  $\boxed{\frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} > \frac{\ln \beta}{\beta - 1}}$  για  $1 < \alpha < \beta$ . Οπότε θεωρούμε την

$$\text{συνάρτηση } h \text{ με } h(x) = \frac{\ln x}{x - 1}, \quad x > 1$$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  με

$$h'(x) = \frac{\frac{x - 1}{x} - \ln x}{(x - 1)^2} = \frac{\frac{x - 1 - x \ln x}{x}}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - x \ln x}{x(x - 1)^2}$$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = x - 1 - x \ln x$ ,  $x \geq 1$

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, +\infty)$  και για κάθε  $x > 1$  είναι

$$g'(x) = 1 - \left( \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

Οπότε η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ . Άρα

$$x > 1 \Rightarrow g(x) < g(1) \Rightarrow x - 1 - x \ln x < 1 - 1 - 1 \ln 1 \Rightarrow x - 1 - x \ln x < 0 \quad (1)$$

$$\text{Επομένως για κάθε } x > 1 \text{ είναι } h'(x) = \frac{x - 1 - x \ln x}{x(x-1)^2} \stackrel{(1)}{<} 0$$

οπότε η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(1, +\infty)$ . Άρα

$$1 < \alpha < \beta \Rightarrow h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} > \frac{\ln \beta}{\beta - 1}$$