

23.22 1)

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

β) Έχουμε ότι $x > 1 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) > f(1) \Rightarrow x-1-\ln x > 1-1-\ln 1 \Rightarrow \boxed{x-1-\ln x > 0}$

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{\left(1 \cdot \ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}}\right)(x-1) - x \ln x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{x} \ln x - \ln x + x - 1 - \cancel{x} \ln x}{(x-1)^2} \stackrel{\text{ερώτημα β}}{>} 0,$$

για κάθε $x \in (1, +\infty)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

δ) $\boxed{\alpha^{a(\beta-1)} < \beta^{b(a-1)}} \Leftrightarrow \ln \alpha^{a(\beta-1)} < \ln \beta^{b(a-1)} \Leftrightarrow a(\beta-1) \ln \alpha < b(a-1) \ln \beta \stackrel{\substack{a-1>0 \\ b-1>0}}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \frac{a \ln \alpha}{a-1} < \frac{b \ln \beta}{b-1} \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \xrightarrow{f \nearrow} \boxed{\alpha < \beta}, \text{ που ισχύει}$$

23.22 2)

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = e^{-x} - (x+4)e^{-x} = (1-x-4)e^{-x} = (-x-3)e^{-x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow (-x-3)e^{-x} = 0 \Rightarrow -x-3=0 \Rightarrow x=-3$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -3]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-3, +\infty)$

β) Έχουμε ότι

$$x \leq -3 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) \leq f(-3) \Rightarrow (x+4)e^{-x} \leq (-3+4)e^3 \Rightarrow (x+4)e^{-x} \leq e^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+4 \leq e^3 e^x \Rightarrow \boxed{x+4 \leq e^{x+3}}$$

γ) Έχουμε ότι $\alpha < \beta < -3 \xrightarrow{f \nearrow} f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow (\alpha+4)e^{-\alpha} < (\beta+4)e^{-\beta} \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha+4}{e^{\alpha}} < \frac{\beta+4}{e^{\beta}}}$

23.22 3)

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\sqrt{x+1} - x \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{2\sqrt{x+1}^2 - x}{2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{2x+2-x}{2\sqrt{x+1}(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x+2}{2\sqrt{x+1}(x+1)} = \frac{2\sqrt{x+1} - x - 2}{2\sqrt{x+1}(x+1)}$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{f'(x) \leq 0} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} - x - 2 \leq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} \leq x+2 \stackrel{x+2>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x+1})^2 \leq (x+2)^2 \Leftrightarrow 4(x+1) \leq x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4x} + \cancel{4} \leq x^2 + \cancel{4x} + \cancel{4} \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x=0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

β) Έχουμε ότι $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow \ln(x+1) - \frac{x}{\sqrt{x+1}} \leq \ln(0+1) - \frac{0}{\sqrt{0+1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln(x+1) - \frac{x}{\sqrt{x+1}} \leq 0 \Rightarrow \boxed{\ln(x+1) \leq \frac{x}{\sqrt{x+1}}}$$

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε

$$\ln(x+1) \leq \frac{x}{\sqrt{x+1}} \stackrel{x=1}{\Rightarrow} \ln(1+1) \leq \frac{1}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow \ln 2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \ln 2 \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2^{\sqrt{2}} \leq 1 \Rightarrow \ln 2^{\sqrt{2}} \leq \ln e \Rightarrow \boxed{2^{\sqrt{2}} \leq e}, \text{ που ισχύει}$$

23.22 4)

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 1 - \frac{\pi}{x} = \frac{x - \pi}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x - \pi}{x} = 0 \Rightarrow x - \pi = 0 \Rightarrow x = \pi$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	π	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$				

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi]$

γνησίως αύξουσα στο $[\pi, +\infty)$

β) Έχουμε ότι

$$\boxed{e^e \pi^\pi > e^{2\pi}} \Leftrightarrow \ln(e^e \pi^\pi) > \ln e^{2\pi} \Leftrightarrow \ln e^e + \ln \pi^\pi > 2\pi \ln e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e \ln e + \pi \ln \pi > 2\pi \Leftrightarrow e + \pi \ln \pi > \pi + \pi \Leftrightarrow e - \pi > \pi - \pi \ln \pi \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e - \pi \ln e > \pi - \pi \ln \pi \Leftrightarrow f(e) > f(\pi)$, που ισχύει διότι $e < \pi$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi]$

23.22 5)

- α) Είναι $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$. Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x \ln x} (\ln x + 1) = 0 \xRightarrow{e^{x \ln x} > 0} \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$			$\nearrow$	$\searrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-1}]$

γνησίως αύξουσα στο $[e^{-1}, +\infty)$

- β) Επειδή $x > 2$ θα είναι $x > x-1 > 1 \xRightarrow{1 > e^{-1}} x > x-1 > \frac{1}{e}$. Οπότε έχουμε ότι

$$x > x-1 \xRightarrow{f \nearrow} f(x) > f(x-1) \Rightarrow \boxed{x^x > (x-1)^{x-1}}$$

- γ) Η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{1}{x-1} \ln x - \frac{1}{x} \ln(x-1)}{\ln^2 x} = \frac{\frac{x \ln x - (x-1) \ln(x-1)}{x(x-1)}}{\ln^2 x} = \\ &= \frac{\ln x^x - \ln(x-1)^{x-1} \xrightarrow{\text{ερώτημα β}}}{x(x-1) \ln^2 x} > 0, \text{ για κάθε } x > 2 \text{ οπότε η } g \text{ είναι γνησίως} \end{aligned}$$

αύξουσα στο $(2, +\infty)$

- δ) Έχουμε ότι

$$\boxed{\beta^{\ln(\alpha-1)} < \alpha^{\ln(\beta-1)}} \Leftrightarrow \ln \beta^{\ln(\alpha-1)} < \ln \alpha^{\ln(\beta-1)} \Leftrightarrow \ln(\alpha-1) \ln \beta < \ln(\beta-1) \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\xRightarrow{\alpha > 2 \Rightarrow \ln \alpha > 0, \beta > 2 \Rightarrow \ln \beta > 0} \frac{\ln(\alpha-1)}{\ln \alpha} < \frac{\ln(\beta-1)}{\ln \beta} \Leftrightarrow g(\alpha) < g(\beta) \xRightarrow{g \nearrow} \alpha < \beta, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

23.22 6)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^x (1-x) - e^x = \cancel{e^x} - x e^x - \cancel{e^x} = -x e^x$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -x e^x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

β) Έχουμε ότι

$$x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow e^x(1-x) - 1 \leq e^0(1-0) - 1 \Rightarrow e^x(1-x) - 1 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x(1-x) \leq 1 \quad \begin{matrix} x \leq 0 \Rightarrow 1-x \geq 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \boxed{e^x \leq \frac{1}{1-x}}$$

γ) Έχουμε ότι

$$\boxed{\beta < \alpha < 0} \Rightarrow f(\beta) < f(\alpha) \Rightarrow e^\beta(1-\beta) - \beta' < e^\alpha(1-\alpha) - \alpha' \Rightarrow$$

$$\ln(x+1) \leq \frac{x}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x=1} \ln(1+1) \leq \frac{1}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow \ln 2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \ln 2 \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^\beta(1-\beta) < e^\alpha(1-\alpha) \quad \begin{matrix} \alpha < 0 \Rightarrow 1-\alpha \geq 0 \\ e^\beta \geq 0 \Rightarrow \end{matrix} \frac{1-\beta}{1-\alpha} < \frac{e^\alpha}{e^\beta} \Rightarrow \ln \frac{1-\beta}{1-\alpha} < \ln e^{\alpha-\beta} \Rightarrow \boxed{\ln \frac{1-\beta}{1-\alpha} < \alpha - \beta}$$