

21.8 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, x]$, ως λογαριθμική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, x)$, ως λογαριθμική με $f'(x) = \frac{1}{x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (1, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x - 1} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1} \stackrel{x-1>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} < \frac{1}{\xi} < 1 \stackrel{x>\xi>0}{\Leftrightarrow} x > \xi > 1$$

που ισχύει διότι $\xi \in (1, x)$

21.8 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$, ως λογαριθμική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+1)$, ως λογαριθμική με $f'(x) = \frac{1}{x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \ln \frac{x+1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \stackrel{0 < x < \xi < x+1}{\Leftrightarrow} x+1 > \xi > x \quad \text{που ισχύει διότι } \xi \in (x, x+1)$$

21.8 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(x+1)$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με $f'(x) = \frac{1}{x+1}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow \frac{1}{\xi+1} = \frac{\ln(x+1) - \ln 1}{x} \Rightarrow \frac{1}{\xi+1} = \frac{\ln(x+1)}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi+1} < 1 \stackrel{x+1>\xi+1>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x+1 > \xi+1 > 1 \Leftrightarrow x > \xi > 0 \quad \text{που ισχύει διότι } \xi \in (0, x)$$

21.8 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως εκθετική με $f'(x) = e^x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{1+x < e^x < 1+xe} \Leftrightarrow x < e^x - 1 < xe \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e^0 < e^\xi < e^1 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$$

$$\text{που ισχύει διότι } \xi \in (0, x) \stackrel{x \in (0,1)}{\Rightarrow} \xi \in (0, 1)$$

21.8 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, x]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, x)$, ως εκθετική με $f'(x) = e^x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (1, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^1}{x - 1} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - e}{x - 1} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{e^x > ex} \Leftrightarrow e^x - e > ex - e \Leftrightarrow e^x - e > e(x - 1) \stackrel{x-1>0}{\Leftrightarrow} \frac{e^x - e}{x - 1} > e \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e^\xi > e \Leftrightarrow \xi > 1$$

$$\text{που ισχύει διότι } \xi \in (1, x) \Rightarrow \xi > 1$$

21.8 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \varepsilon\phi x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως τριγωνομετρική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως εκθετική με $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \xi} = \frac{\epsilon \phi x - \epsilon \phi 0}{x} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \xi} = \frac{\epsilon \phi x}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\epsilon \phi x > x} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\epsilon \phi x}{x} > 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sin^2 \xi} > 1 \quad \text{που ισχύει}$$

21.8 7)

Αν $x = 0$ τότε η σχέση προφανώς ισχύει ως ισότητα

Έστω τώρα ότι $x > 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x + x \eta \mu x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με } f'(x) = \cancel{\eta \mu x} + \cancel{\eta \mu x} + x \sin x = x \sin x$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow \xi \sin \xi = \frac{\sin x + x \eta \mu x - \sin 0 + 0 \eta \mu 0}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi \sin \xi = \frac{\sin x + x \eta \mu x - 1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\sin x + x \eta \mu x \geq 1} \Leftrightarrow \sin x + x \eta \mu x - 1 \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\sin x + x \eta \mu x - 1}{x} \geq 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \xi \sin \xi \geq 0 \quad \text{που}$$

ισχύει

διότι

$\xi > 0$ (αφού $\xi \in (0, x)$) και

$$\sin \xi \geq 0 \quad (\text{αφού } \xi \in (0, x) \Rightarrow \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right))$$

21.8 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (1+x)^a$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με } f'(x) = a(1+x)^{a-1}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow a(1+\xi)^{a-1} = \frac{(1+x)^a - (1+0)^a}{x} \Rightarrow a(1+\xi)^{a-1} = \frac{(1+x)^a - 1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{(1+x)^a - 1 > ax} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{(1+x)^a - 1}{x} > \frac{ax}{x} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} a(1+\xi)^{a-1} > a \stackrel{a>0}{\Leftrightarrow} (1+\xi)^{a-1} > 1$$

$$\Leftrightarrow 1+\xi > 1 \Leftrightarrow \xi > 0 \quad \underline{\text{που ισχύει}} \quad \text{διότι } \xi \in (0, x)$$