

Παρατηρούμε ότι

στο διάστημα $[-1, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^3) = 2 \cdot 0^3 = 0 \\ f(0) &= 2 \cdot 0^3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι συνεχής και στο } x_0 = 0$$

Οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$

Ακόμη

στο διάστημα $(-1, 0)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x} = 2 \cdot 0^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη}$$

και στο $x_0 = 0$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$

Άρα για την f ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[-1, 1]$

Παρατηρούμε ότι

στο διάστημα $[-1, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 + x) = 2 \cdot 0^2 + 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + x) = 0^3 + 0 = 0 \\ f(0) &= 2 \cdot 0^2 + 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι συνεχής και στο } x_0 = 0$$

Οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ (1)

Ακόμη

στο διάστημα $(-1, 0)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(2x + 1)}{x} = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + 1)}{x} = 0^2 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$

Άρα για την f ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[-1, 1]$

21.3 3)

Το τριώνυμο $x^2 - 2x$ έχει ρίζες τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 2$. Επομένως η συνάρτηση f γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ -x^2 + 2x + 1, & x \in (0, 2) \end{cases}$$

Έτσι

α) στο διάστημα $[-1, 1]$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (η συνάρτηση $h(x) = |x|$ είναι συνεχής)

στο διάστημα $(-1, 0)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

αλλά

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = 0 - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x(x-2)}{x} = -0 + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και άρα δεν είναι στο $[-1, 1]$ οπότε στο διάστημα $[-1, 1]$ δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα μέσης τιμής

β) στο διάστημα $[0, 1]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

άρα στο διάστημα $[0, 1]$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα μέσης τιμής