

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$(\beta - \alpha)f'(\alpha) + f(\alpha) < f(\beta) < (\beta - \alpha)f'(\beta) + f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\beta - \alpha)f'(\alpha) < f(\beta) - f(\alpha) < (\beta - \alpha)f'(\beta) \stackrel{\beta - \alpha > 0}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\beta)$$

$$\text{Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι } f'(\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\beta)$$

Όμως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε

$$f'(\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\beta) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \stackrel{f': \nearrow}{\Leftrightarrow} \alpha < \xi < \beta$$

που ισχύει διότι $\xi \in (\alpha, \beta)$

β) Έχουμε ισοδύναμα

$$f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{x - (x-1)=1}{\Leftrightarrow} \frac{f(x) - f(x-1)}{(x+1) - x=1} < f'(x) < \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow$$

$$\text{Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι } \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} < f'(x) < \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$$

Όμως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x-1, x]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x-1, x)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (x-1, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} \quad (1)$$

Ακόμη

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+1)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (x, x+1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \quad (2)$$

Οπότε

$$\frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} < f'(x) < \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \stackrel{(1),(2)}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(x) < f'(\xi_2) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} \xi_1 < x < \xi_2$$

που ισχύει διότι $\xi_1 \in (x-1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x+1)$

γ) Έχουμε ισοδύναμα

$$2f\left(\frac{5}{2}\right) < f(2) + f(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) < f(2) + f(3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) - f(2) < f(3) - f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{5}{2}\right) - f(2)}{\frac{5}{2} - 2} < \frac{f(3) - f\left(\frac{5}{2}\right)}{3 - \frac{5}{2}}$$

$$\text{Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι } \frac{f\left(\frac{5}{2}\right) - f(2)}{\frac{5}{2} - 2} < \frac{f(3) - f\left(\frac{5}{2}\right)}{3 - \frac{5}{2}}$$

Όμως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[2, \frac{5}{2}\right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{5}{2}\right) - f(2)}{\frac{5}{2} - 2} \quad (1)$$

Ακόμη

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{5}{2}, 3\right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f\left(\frac{5}{2}\right)}{3 - \frac{5}{2}} \quad (2)$$

Οπότε

$$\frac{f\left(\frac{5}{2}\right)-f\left(2\right)}{\frac{5}{2}-2}<\frac{f\left(3\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)}{3-\frac{5}{2}}\overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}f'\left(\xi_1\right)<f'\left(\xi_2\right)\overset{f':\nearrow}{\Leftrightarrow}\xi_1<\xi_2$$

$$\text{που ισχύει διότι } \xi_1\in\left(2,\frac{5}{2}\right)\text{ και } \xi_2\in\left(\frac{5}{2},3\right)$$