

Θεωρούμε την συνάρτηση  $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = g(x) \ln f(x)$ . Τότε

Η συνάρτηση  $h$

είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

και

$$\left. \begin{array}{l} h(\alpha) = g(\alpha) \ln f(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=1}{=} 0 \\ h(\beta) = g(\beta) \ln f(\beta) \stackrel{g(\beta)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση  $h$  ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και επομένως η εξίσωση

$$h'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow g'(\gamma) \ln f(\gamma) + g(\gamma) \frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)} = 0 \Leftrightarrow \boxed{g'(\gamma) f(\gamma) \ln f(\gamma) + g(\gamma) f'(\gamma) = 0}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$