

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = e^{f(x)} \eta \mu x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = e^{f(x)} f'(x) \eta \mu x + e^{f(x)} \sigma \upsilon \nu x$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= e^{f(0)} \eta \mu 0 = 0 \\ h(\pi) &= e^{f(\pi)} \eta \mu \pi = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0) = h(\pi)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{f(\xi)} f'(\xi) \eta \mu \xi + e^{f(\xi)} \sigma \upsilon \nu \xi = 0 \Leftrightarrow e^{f(\xi)} [f'(\xi) \eta \mu \xi + \sigma \upsilon \nu \xi] = 0 \stackrel{e^{f(\xi)} \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) \eta \mu \xi + \sigma \upsilon \nu \xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \eta \mu \xi = -\sigma \upsilon \nu \xi \stackrel{\xi \in (0, \pi) \Rightarrow \eta \mu \xi \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{\sigma \upsilon \nu \xi}{\eta \mu \xi} \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) = -\sigma \phi \xi}$$