

20.21 1)

Η εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Προκειμένου η παραπάνω εφαπτόμενη να περνάει από το σημείο $(0, 0)$, θα πρέπει

$$0 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow -f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

Κατόπιν αυτού θεωρούμε την συνάρτηση f με $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 1 \\ h(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi) = \frac{xf'(\xi) - f(\xi)}{x^2}}{\xi^2} \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

20.21 2)

Η εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Προκειμένου η παραπάνω εφαπτόμενη να περνάει από το σημείο $(0, 0)$, θα πρέπει

$$0 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow -f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$

Κατόπιν αυτού θεωρούμε την συνάρτηση f με $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [1, 2]$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(1) = \frac{f(1)}{1} = 1 \\ h(2) = \frac{f(2)}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow h(1) = h(2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi) = \frac{xf'(\xi) - f(\xi)}{x^2}}{\xi^2} \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

20.21 3)

Η εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Προκειμένου η παραπάνω εφαπτόμενη να περνάει από το σημείο $(\gamma, 0)$, θα πρέπει

$$0 - f(\xi) = f'(\xi)(\gamma - \xi) \Leftrightarrow (\gamma - \xi)f'(\xi) \Leftrightarrow (\gamma - \xi)f'(\xi) + f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\xi - \gamma)f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $(\xi - \gamma)f'(\xi) - f(\xi) = 0$

Κατόπιν αυτού θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{f(x)}{x - \gamma}$, $x \in [\alpha, \beta]$

Η συνάρτηση h είναι καλώς ορισμένη διότι $\gamma \notin [\alpha, \beta]$ και

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκο συνεχών

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = \frac{f'(x)(x - \gamma) - f(x)}{(x - \gamma)^2}$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \frac{f(\alpha)}{\alpha - \gamma} \stackrel{f(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) &= \frac{f(\beta)}{\beta - \gamma} \stackrel{f(\beta)=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$

Όμως

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow h'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)(\xi - \gamma) - f(\xi)}{(\xi - \gamma)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(\xi)(\xi - \gamma) - f(\xi) = 0} \quad \text{που είναι η σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε}$$

20.21 4)

Είναι

$$g(\xi) = \sin \xi \quad (1) \quad \text{και} \quad g'(x) = -\eta \mu x \Rightarrow g'(\xi) = -\eta \mu \xi \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\xi, g(\xi))$ θα είναι

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} y - \sin \xi = -\eta \mu \xi (x - \xi)$$

Προκειμένου η παραπάνω εφαπτόμενη να περνάει από το σημείο $(\pi, 0)$, θα πρέπει

$$0 - \sin \xi = -\eta \mu \xi (\pi - \xi) \Leftrightarrow \boxed{\sin \xi = (\pi - \xi) \eta \mu \xi}$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\sin \xi = (\pi - \xi) \eta \mu \xi$

Κατόπιν αυτού θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ως πηλίκο συνεχών

είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = \frac{-(x-\pi)\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{(x-\pi)^2}$$

και

$$\left. \begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Όμως

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{-(\xi-\pi)\eta\mu\xi - \sigma\upsilon\nu\xi}{(\xi-\pi)^2} = 0 \Rightarrow -(\xi-\pi)\eta\mu\xi - \sigma\upsilon\nu\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(\pi-\xi)\eta\mu\xi = \sigma\upsilon\nu\xi} \quad \text{που είναι η σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε}$$