

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \alpha x + 1} + \beta x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + \beta x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^2}} + \beta x \right) \stackrel{x>0}{|x|=x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^2}} + \beta x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^2}} + \beta \right) = (+\infty)(1 + \beta)\end{aligned}$$

Επειδή θέλουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \alpha x + 1} + \beta x \right) = 3$ θα πρέπει $1 + \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = -1}$

(διαφορετικά το όριο θα ήταν $+\infty$ ή $-\infty$)

Ακόμη για $\beta = -1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \alpha x + 1} - x \right) &\stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και} \\ \text{διαιρούμε με την συζυγή} \\ \text{παράσταση}}{=} 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + \alpha x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + \alpha x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + \alpha x + 1} + x} &= 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha x + 1}^2 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} &\stackrel{x>0}{|x|=x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \alpha x + 1 - x^2}{x \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\alpha + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} &= 3 \Rightarrow \frac{\alpha + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = 3 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 6}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + \alpha x + 2} + \beta x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + \beta x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{4 + \frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^2}} + \beta x \right) \stackrel{x<0}{|x|=-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{4 + \frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^2}} + \beta x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{4 + \frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^2}} + \beta \right) = (-\infty)(-2 + \beta)\end{aligned}$$

Επειδή θέλουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + \alpha x + 2} + \beta x \right) = 1$ θα πρέπει $-2 + \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$

(διαφορετικά το όριο θα ήταν $+\infty$ ή $-\infty$)

Ακόμη για $\beta = 2$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + \alpha x + 2} + 2x \right) \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και} \\ \text{διαιρούμε με την συζυγή} \\ \text{παράσταση}}{=} 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + \alpha x + 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + \alpha x + 2} - 2x)}{\sqrt{4x^2 + \alpha x + 2} - 2x} = 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + \alpha x + 2}^2 - (2x)^2}{|x| \sqrt{4 + \frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x} = 1 \stackrel{x < 0}{|x| = -x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{4x^2} + \alpha x + 2 - \cancel{4x^2}}{-x \sqrt{4 + \frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x} = 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(\alpha + \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{4 + \frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2 \right)} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha + 0}{-\sqrt{4 + 0 + 0} - 2} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{-4} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -4}
\end{aligned}$$

7.25 3)

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \alpha x - \beta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} - \alpha x - \beta \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} - \alpha x - \beta \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} - \alpha x - \beta \right) \stackrel{x < 0}{|x| = -x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} - \alpha x - \beta \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right) = \\
&= (-\infty) \left(-\sqrt{1 - 0 + 0} - \alpha - 0 \right) = (-\infty) (-1 - \alpha)
\end{aligned}$$

Επειδή θέλουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \alpha x - \beta) = 0$ θα πρέπει $-1 - \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$

(διαφορετικά το όριο θα ήταν $+\infty$ ή $-\infty$)

Ακόμη για $\alpha = -1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} + x - \beta) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε και} \\ \text{διαίρουμε με την συζυγή} \\ \text{παράσταση} \\ \text{(αφήνουμε έξω το } \beta \text{)} \end{array} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + x)(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x)}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x} - \beta \right] = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 5}^2 - x^2}{|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} - \beta \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\cancel{x^2} - 2x + 5 - \cancel{x^2}}{-x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} - \beta \right) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\cancel{x} \left(-2 + \frac{5}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1 \right)} - \beta \right] = 0 \Rightarrow \frac{-2 + 0}{-\sqrt{1 - 0 + 0} - 1} - \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}
\end{aligned}$$