

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

5.10 1)

α) Επειδή είμαστε σε σημείο αλλαγής τύπου βρίσκουμε τα πλευρικά όρια

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + x - 1) = 2^2 + 2 - 1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 1) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

β) Επειδή είμαστε σε σημείο αλλαγής τύπου βρίσκουμε τα πλευρικά όρια

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + 2) = 1^2 - 1 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3x - 2} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{το } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ δεν υπάρχει}$$

5.10 2)

Επειδή είμαστε σε σημείο αλλαγής τύπου βρίσκουμε τα πλευρικά όρια

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 10^-} (3x^2 - 7x - 10) = 3 \cdot 10^2 - 7 \cdot 10 - 10 = 220 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 10^+} (2x^2 + x + 10) = 2 \cdot 10^2 + 10 + 10 = 220 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 220}$$

5.10 3)

Επειδή είμαστε σε σημείο αλλαγής τύπου βρίσκουμε τα πλευρικά όρια

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - 2x) = 3 - 2 \cdot 0 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)}$$

5.10 4)

Επειδή είμαστε σε σημείο αλλαγής τύπου βρίσκουμε τα πλευρικά όρια

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 4x + 1) = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = -1 - 1 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2}$$

5.10 5)

Επειδή είμαστε σε σημείο αλλαγής τύπου βρίσκουμε τα πλευρικά όρια

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 7 : \Delta = 64 \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{6 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6+8}{2} \Rightarrow x_1 = 7 \\ x_2 = \frac{6-8}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 49} = \\ \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{(x-7)(x+1)}{(x-7)(x+7)} &= \frac{7+1}{7+7} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} (3 - 2x) = 3 - 2 \cdot 7 = -11$$

Επομένως

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \frac{4}{7} \\ \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = -11 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 7} f(x)}$$

5.10 6)

Επειδή είμαστε σε σημείο αλλαγής τύπου βρίσκουμε τα πλευρικά όρια

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = 3+3=6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x = 2 \cdot 3 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6}$$

5.10 7)

Επειδή είμαστε σε σημείο αλλαγής τύπου βρίσκουμε τα πλευρικά όρια

$$\begin{array}{l} x^2 + x - 2 : \Delta = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \end{array} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x^2 + x - 2} = \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

Ακόμη

$$\begin{array}{l} x^2 + 3x - 4 : \Delta = 25 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{-3+5}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-3-5}{2} \Rightarrow x_2 = -4 \end{array} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1+4}{1+1} = \frac{5}{2}$$

Επομένως

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{5}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}$$