

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = (0^2 + 1) \cdot (+\infty) = +\infty$$

άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

- Τώρα θα ψάξουμε οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες

– Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη (αφού έχει πλάγια)

– Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

Η f στο $-\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη (αφού έχει πλάγια)

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

- Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 1$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x + 1}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{e^x - e} = (0^2 + 1) \cdot (+\infty) = +\infty \quad \text{άρα}$$

η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

- Τώρα θα ψάξουμε οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες

– Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - e} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

– Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - e} = \frac{0+1}{0-e} = -\frac{1}{e}$$

άρα η ευθεία $y = -\frac{1}{e}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

Η f στο $-\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

19.4 2)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = (3 \cdot 0^2 + 1) \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ άρα η ευθεία}$$

$\boxed{x=0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \boxed{3}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 + 1}{x} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3x^2} + 1 - \cancel{3x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=3x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη (αφού έχει πλάγια)

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \boxed{3}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=3}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^2 + 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{3x^2} + 1 - \cancel{3x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=3x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

Η f στο $-\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη (αφού έχει πλάγια)

19.4 3)

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-1} = \frac{x^2-4x+4}{x^2-1} = \frac{x^2-4x+4}{(x-1)(x+1)}$ είναι το

$$A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$ (άκρα ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-4x+4}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-4x+4}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \\ &= \frac{1^2-4 \cdot 1+4}{1+1} \cdot (+\infty) = \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ άρα η ευθεία } \boxed{x=1} \text{ είναι κατακόρυφη}\end{aligned}$$

ασύμπτωτη της f

Ακόμη

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-4x+4}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-4x+4}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \\ &= \frac{(-1)^2-4 \cdot (-1)+4}{-1-1} \cdot (+\infty) = -\frac{9}{2} \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ άρα η ευθεία } \boxed{x=-1} \text{ είναι}\end{aligned}$$

κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

Η f στο $-\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

19.4 4)

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x^2}{x^3-9x} = \frac{x^2}{x(x-3)(x+3)}$ είναι το

$$A = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $x_1 = -3$, στο $x_2 = 0$ και στο $x_3 = 3$ (άκρα ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2}{x(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2}{x(x-3)} \cdot \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x+3} =$$

$$= \frac{(-3)^2}{(-3)(-3-3)} \cdot (+\infty) = \frac{9}{18} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ άρα η ευθεία } \boxed{x = -3} \text{ είναι κατακόρυφη}$$

ασύμπτωτη της f

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{(0-3)(0+3)} = \frac{0}{-9} = \boxed{0},$$

άρα δεν έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x(x+3)} \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} =$$

$$= \frac{3^2}{3(3+3)} \cdot (+\infty) = \frac{9}{18} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ άρα η ευθεία } \boxed{x = 3} \text{ είναι επίσης κατακόρυφη}$$

ασύμπτωτη της f

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 - 9x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3 - 9x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

Η f στο $-\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

19.4 5)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $x_0 = 0$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 - \frac{|x+1|}{x} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow 0^+} |x+1| \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 3 - |0+1| \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ άρα η}$$

ευθεία $\boxed{x = 0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{|x+1|}{x} \right)^{x > -1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x}} \right) =$$

$$= 3 - (1+0) = \boxed{2}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{|x+1|}{x} \right)^{x < -1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{-x-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{\cancel{x} \left(-1 - \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x}} \right) =$$

$$= 3 - (-1-0) = \boxed{4}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=4}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

Η f στο $-\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

19.4 6)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [-1, 0) \cup [1, +\infty)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [-1, 0) \cup [1, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1-x^2}{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{-x}}$$

$$= \sqrt{1-0} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ άρα η ευθεία } \boxed{x=0} \text{ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της } f$$

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες (μόνο στο $+\infty$)

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^{\cancel{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{1-0} \cdot (+\infty) = (+\infty)$$

άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ αλλά ούτε και οριζόντια ασύμπτωτη (αφού $\lambda \neq 0$)

19.4 7)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [0,1) \cup (1, +\infty)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [0,1) \cup (1, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 1$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x}+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}-1} = (\sqrt{1}+1)(+\infty) = +\infty, \text{ άρα η}$$

ευθεία $\boxed{x=1}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες (μόνο στο $+\infty$)

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1+0}{1+0} = \boxed{1}, \text{ άρα η ευθεία } \boxed{y=1} \text{ είναι}$$

οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

19.4 8)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} =$$
$$= \sqrt{1+0+0} = \boxed{1}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+3} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+3} - x)(\sqrt{x^2+x+3} + x)}{\sqrt{x^2+x+3} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+3}^2 - x^2}{x \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x + 3 - \cancel{x^2}}{x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

άρα η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη (αφού έχει πλάγια)

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} =$$

$$= -\sqrt{1+0+0} = \boxed{-1}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda = -1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 3} + x)(\sqrt{x^2 + x + 3} - x)}{\sqrt{x^2 + x + 3} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}^2 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} + x + 3 - \cancel{x}}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} =$$

$$= \frac{1+0}{-\sqrt{1+0+0}-1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

άρα η ευθεία $y = -x - \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

Η f στο $-\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη (αφού έχει πλάγια)

19.4 9)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_1 = 0$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH } x \rightarrow 0^+}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \text{ άρα η ευθεία } \boxed{x=0}$$

είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = \boxed{1}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = \boxed{1}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = x + 1}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη (αφού έχει πλάγια)

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = \boxed{1}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = \boxed{1}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = x + 1}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

Η f στο $-\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη (αφού έχει πλάγια)

19.4 10)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

άρα η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Επίσης

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot e^{-x}}{x} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

19.4 11)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty, \text{ άρα η}$$

ευθεία $\boxed{x=0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες (μόνο στο $+\infty$)

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \boxed{0}, \text{ άρα η ευθεία } \boxed{y=0} \text{ είναι οριζόντια}$$

ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Η f στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

19.4 12)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, \pi)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, \pi)$, ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $x_1 = 0$ και στο $x_2 = \pi$ (άκρα ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\varepsilon \varphi \frac{x}{2} \right) \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y = \varepsilon \varphi \frac{x}{2} \\ \text{όταν } x \rightarrow 0^+ \text{ τότε } y \rightarrow 0^+}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty, \text{ άρα η}$$

ευθεία $\boxed{x=0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \ln \left(\varepsilon \varphi \frac{x}{2} \right) \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y = \frac{x}{2} \\ \text{όταν } x \rightarrow \pi^- \text{ τότε } y \rightarrow \frac{\pi^-}{2}}}{=} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \ln(\varepsilon \varphi y) = \ln(+\infty) = +\infty, \text{ άρα η}$$

ευθεία $\boxed{x=\pi}$ είναι επίσης κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες αφού το πεδίο ορισμού της δεν περιέχει κάποιο άπειρο

