

19.2 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

$$\text{Στο } +\infty \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-2}{2x+6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

άρα η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\text{Ακόμη στο } -\infty \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-2}{2x+6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

άρα η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

$$\text{Στο } +\infty \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x} \left(2 + \frac{1}{e^x} \right)}{\cancel{e^x} \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

άρα η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\text{Ακόμη στο } -\infty \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 1} = 1$$

άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.2 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+7}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \boxed{3}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+7}{x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = \boxed{3}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.2 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Θα

ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{-2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) = \boxed{-1}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=-1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{-2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = \boxed{-1}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = -1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.2 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\left(-\infty, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right). \text{ Θα ψάξουμε για οριζόντιες}$$

ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 2}{x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 2}{x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.2 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{\text{ρίζες του παρονομαστή}\}$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{5x^3 + 2x^2 - 3x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{5x} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{5x^3 + 2x^2 - 3x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{5x} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.2 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{\text{ρίζες του παρονομαστή}\}$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4 - 7x}{3x^3 - 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{3} = +\infty$$

άρα στο $+\infty$ η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 7x}{3x^3 - 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{3} = -\infty$$

άρα ούτε στο $-\infty$ η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη

Οπότε η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες

19.2 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x + 1}{e^{2x} + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x} \left(3 + \frac{1}{e^x} \right)}{e^{\cancel{2x}} \left(1 + \frac{3}{e^{2x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{e^x}}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^{2x}} \right)} = \\ &= \frac{3+0}{(+\infty)(1+0)} = \frac{3}{+\infty} = \boxed{0}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x + 1}{e^{2x} + 3} \stackrel{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0}{=} \frac{3 \cdot 0 + 1}{0 + 3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

άρα η ευθεία $y = \frac{1}{3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

19.2 8)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{5\}$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}}{x \left(1 + \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{5}{x} \right)} = \\ &\stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}}{\cancel{x} \left(1 + \frac{5}{x} \right)} = \frac{\sqrt{1+0+0}}{1+0} = \boxed{1}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}}{x \left(1 + \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{5}{x} \right)} = \\ &\stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}}{\cancel{x} \left(1 + \frac{5}{x} \right)} = \frac{-\sqrt{1+0+0}}{1+0} = \boxed{-1}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y=-1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

19.2 9)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$

και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + |x|}{2x - 1} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + x}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{4}{2 - 0} = \boxed{2}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + |x|}{2x - 1} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - x}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{2 - 0} = \boxed{1}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

19.2 10)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{\text{ρίζες του παρονομαστή}\}$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 5}{|x - 2| + 3x} \stackrel{x > 2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 5}{x - 2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 5}{4x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8 - \frac{5}{x}}{4 - \frac{2}{x}} = \frac{8 - 0}{4 - 0} = \boxed{2}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 5}{|x - 2| + 3x} \stackrel{x < 2}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 5}{-x + 2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 5}{2x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 - \frac{5}{x}}{2 + \frac{2}{x}} = \frac{8 - 0}{2 + 0} = \boxed{4}\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = 4$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

19.2 11)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θα ψάξουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 1} - x)(\sqrt{x^2 + x - 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x - 1} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1}^2 - x^2}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1 - x^2}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1 - 0}{\sqrt{1 + 0 - 0} + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = \frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Ακόμη

$$\begin{aligned}
\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x \right) = \\
&\stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = \\
&(-\infty) \left(-\sqrt{1 + 0 - 0} - 1 \right) = \boxed{+\infty}
\end{aligned}$$

άρα στο $-\infty$ η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη