

19.1 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = -3$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-5}{2x+6} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-5}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x+3} = [2 \cdot (-3) - 5] \cdot (+\infty) = (-11) \cdot (+\infty) = -\infty$$

άρα η ευθεία $x = -3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(1, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 1$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=x-1 \\ \text{όταν } x \rightarrow 1^+, y \rightarrow 0^+}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 2$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \boxed{+\infty}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x=2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -5) \cup (-5, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = -5$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x+3}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5^+} (x+3) \cdot \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{1}{x+5} = (-5+3) \cdot (+\infty) = (-2) \cdot (+\infty) = \boxed{-\infty}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x=-5}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(3, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 3$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 3 \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x=3}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = -2$ και στο $x_0 = 2$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)} &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5x}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = \\ &= \left[\frac{5(-2)}{-2-2} \right] \cdot (+\infty) = \frac{10}{4} \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x=-2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Ομοίως

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \\ &= \frac{5 \cdot 2}{2+2} \cdot (+\infty) = \frac{10}{4} \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

άρα και η ευθεία $\boxed{x=2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 6)

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f(x) &= \frac{x+2}{x^2+3x-4} \Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x+4)} \end{aligned}$$

$x^2+3x-4: \Delta=25 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+5}{2} \Rightarrow x_1=1 \\ x_2 = \frac{-3-5}{2} \Rightarrow x_2=-4 \end{cases}$

Οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -4) \cup (-4, 1) \cup (1, +\infty)$. Επομένως ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = -4$ και στο $x_0 = 1$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)} &= \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x+2}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x+2}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{1}{x+4} = \frac{-4+2}{-4-1} \cdot (+\infty) = \\ &= -\frac{2}{5} \cdot (+\infty) = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x=-4}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Ομοίως

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x+4} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1+2}{1+4} \cdot (+\infty) =$$

$$= \frac{3}{5} (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

άρα και η ευθεία $\boxed{x=1}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 7)

$$\begin{array}{c} x^2 - 7x + 12 : \Delta = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{7+1}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{7-1}{2} \Rightarrow x_2 = 3 \end{array} \end{array}$$

$$\text{Είναι } f(x) = \frac{2x-8}{x^2-7x+12} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{2x-8}{(x-4)(x-3)}$$

Οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$. Επομένως ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 3$ και στο $x_0 = 4$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-8}{(x-4)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-8}{x-4} \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{2 \cdot 3 - 8}{3 - 4} \cdot (+\infty) =$$

$$= 2 \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x=3}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Ακόμη

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x-8}{(x-4)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2 \cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x-3)} = \frac{2}{4-3} = \boxed{2}$$

και άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 4$

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 8)

Είναι

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3-2x^2-x+2} \quad \begin{array}{c} x^3-2x^2-x+2: \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παράγοντοποίηση με Horner} \end{array} \Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x^2-x-2)} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} x^2-x-2: \Delta=9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+3}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+1)}$$

Οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -1) \cup (1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Επομένως ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = -1$ και στο $x_0 = 1$ και στο $x_0 = 2$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} \cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} =$$

$$= \frac{2(-1)+1}{(-1-1)(-1-2)} \cdot (+\infty) = -\frac{1}{6} \cdot (+\infty) = \boxed{-\infty}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x = -1}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Ακόμη

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{(x+1)(x-2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} =$$

$$\frac{2 \cdot 1 + 1}{(1+1)(1-2)} \cdot (+\infty) = -\frac{3}{2} \cdot (+\infty) = \boxed{-\infty}$$

άρα και η ευθεία $\boxed{x = 1}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Τέλος έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} =$$

$$\frac{2 \cdot 2 + 1}{(2+1)(2-1)} \cdot (+\infty) = -\frac{5}{3} \cdot (+\infty) = \boxed{-\infty}$$

άρα και η ευθεία $\boxed{x = 2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 9)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \boxed{-\infty}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x = 0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 10)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(2, 4) \cup (4, +\infty)$. Επομένως ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 2$ και στο $x_0 = 4$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-4} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = \frac{1}{2-4} (-\infty) = \boxed{+\infty}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x = 2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Ακόμη

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\ln(x-2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \ln(x-2) \cdot \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4} = \ln 2 \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

άρα και η ευθεία $\boxed{x = 4}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

19.1 11)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό. Οπότε η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

19.1 12)

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{e^0}{2} \cdot (+\infty) = \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

19.1 13)

Είναι $|\eta \mu x| \leq |x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$

Έχουμε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\eta \mu x - x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sigma \nu \nu x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{2}{-\eta \mu x} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta \mu x} =$$

$$= -2 \cdot (+\infty) = -\infty$$

άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της