

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

17.16 1)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$x^2(t) + y^2(t) = 5$	$y'(t_0) = ;$
$x(t_0) = 2$	
$y(t_0) = 1$	
$x'(t_0) = 3$	

Οπότε

$$\begin{aligned}x^2(t) + y^2(t) = 5 &\xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} \\&\Rightarrow 2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0) = 0 \xrightarrow{\substack{x(t_0)=2 \\ x'(t_0)=3 \\ y(t_0)=1}} 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot y'(t_0) = 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow 2y'(t_0) = -12 \Rightarrow \boxed{y'(t_0) = -6}\end{aligned}$$

17.16 2)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$2x(t) - 3y(t) + 5 = 0$	$y'(t_0) = ;$
$x'(t_0) = 6$	

Οπότε

$$\begin{aligned}2x(t) - 3y(t) + 5 = 0 &\xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 2x'(t) - 3y'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} \\&\Rightarrow 2x'(t_0) - 3y'(t_0) = 0 \xrightarrow{x'(t_0)=6} 2 \cdot 6 - 3y'(t_0) = 0 \Rightarrow 3y'(t_0) = 12 \Rightarrow \boxed{y'(t_0) = 4}\end{aligned}$$

17.16 3)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$2x(t) - 5y(t) = 4$	$x'(t_0) = ;$
$y'(t_0) = -4$	

Οπότε

$$\begin{aligned}2x(t) - 5y(t) = 4 &\xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 2x'(t) - 5y'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} \\&\Rightarrow 2x'(t_0) - 5y'(t_0) = 0 \xrightarrow{y'(t_0)=-4} 2x'(t_0) - 5(-4) = 0 \Rightarrow 2x'(t_0) = -20 \Rightarrow \boxed{x'(t_0) = -10}\end{aligned}$$

17.16 4)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$x^2(t) + y^2(t) = 13$ $x(t_0) = -3$ $y(t_0) = 2$ $x'(t_0) = -6$	$y'(t_0) = ;$

Οπότε

$$\begin{aligned}
 x^2(t) + y^2(t) = 13 & \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} \\
 \Rightarrow 2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0) = 0 & \xrightarrow{\substack{x(t_0)=-3 \\ x'(t_0)=-6 \\ y(t_0)=2}} \Rightarrow 2 \cdot (-3) \cdot (-6) + 2 \cdot 2 \cdot y'(t_0) = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 4y'(t_0) = -36 \Rightarrow & \boxed{y'(t_0) = -9}
 \end{aligned}$$

17.16 5)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$x^2(t) + y^2(t) = 10$ $x(t_0) = 1$ $y(t_0) = -3$ $y'(t_0) = 2$	$x'(t_0) = ;$

Οπότε

$$\begin{aligned}
 x^2(t) + y^2(t) = 10 & \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} \\
 \Rightarrow 2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0) = 0 & \xrightarrow{\substack{x(t_0)=1 \\ y(t_0)=-3 \\ y'(t_0)=2}} \Rightarrow 2 \cdot 1 \cdot x'(t_0) + 2 \cdot (-3) \cdot 2 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2x'(t_0) = 12 \Rightarrow & \boxed{x'(t_0) = 6}
 \end{aligned}$$

17.16 6)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$x^2(t) + y^2(t) = 9$ $x(t_0) = -\sqrt{3}$ $y(t_0) = \sqrt{6}$ $x'(t_0) = 20$	$y'(t_0) = ;$

Οπότε

$$x^2(t) + y^2(t) = 9 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0) = 0 \quad \begin{matrix} x(t_0)=-\sqrt{3} \\ x'(t_0)=20 \\ y(t_0)=\sqrt{6} \end{matrix} \Rightarrow 2 \cdot (-\sqrt{3}) \cdot 20 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot y'(t_0) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2\sqrt{6}y'(t_0) = 40\sqrt{3} \Rightarrow y'(t_0) = \frac{40\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \Rightarrow y'(t_0) = \frac{20}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow y'(t_0) = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} \Rightarrow \boxed{y'(t_0) = 10\sqrt{2}} \end{aligned}$$

17.16 7)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$2x^2(t) + 3y^2(t) = 11$ $x(t_0) = 2$ $y'(t_0) = 4$ $y(t_0) > 0$	$x'(t_0) = ;$

Οπότε

$$\begin{aligned} 2x^2(t) + 3y^2(t) = 11 & \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} 2x^2(t_0) + 3y^2(t_0) = 11 \xrightarrow{x(t_0)=2} 2 \cdot 2^2 + 3y^2(t_0) = 11 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 3y^2(t_0) = 3 \Rightarrow y^2(t_0) = 1 \xrightarrow{y(t_0)>0} \boxed{y(t_0) = 1} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} 2x^2(t) + 3y^2(t) = 11 & \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 4x(t)x'(t) + 6y(t)y'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} \\ & \Rightarrow 4x(t_0)x'(t_0) + 6y(t_0)y'(t_0) = 0 \quad \begin{matrix} x(t_0)=2 \\ y(t_0)=1 \\ y'(t_0)=4 \end{matrix} \Rightarrow 4 \cdot 2 \cdot x'(t_0) + 6 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 8x'(t_0) = -24 \Rightarrow \boxed{x'(t_0) = -3} \end{aligned}$$

17.16 8)

Έστω $(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουμε

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$3x^2(t) - y^2(t) = 12$ $x(t_0) = 4$ $y'(t_0) = 6$ $y(t_0) < 0$	$x'(t_0) = ;$

Οπότε

$$\begin{aligned} 3x^2(t) - y^2(t) = 12 & \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} 3x^2(t_0) - y^2(t_0) = 12 \xrightarrow{x(t_0)=4} 3 \cdot 4^2 - y^2(t_0) = 12 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 48 - y^2(t_0) = 12 \Rightarrow y^2(t_0) = 36 \xrightarrow{y(t_0)<0} \boxed{y(t_0) = -6} \end{aligned}$$

Επομένως

$$3x^2(t) - y^2(t) = 12 \quad \xRightarrow{\text{παράγωγίζουμε}} \quad 6x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t) = 0 \quad \xRightarrow{t=t_0}$$

$$\Rightarrow 6x(t_0)x'(t_0) - 2y(t_0)y'(t_0) = 0 \quad \xRightarrow{\begin{matrix} x(t_0)=4 \\ y(t_0)=-6 \\ y'(t_0)=6 \end{matrix}} \quad 6 \cdot 4 \cdot x'(t_0) - 2 \cdot (-6) \cdot 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x'(t_0) = -72 \Rightarrow \boxed{x'(t_0) = -3}$$