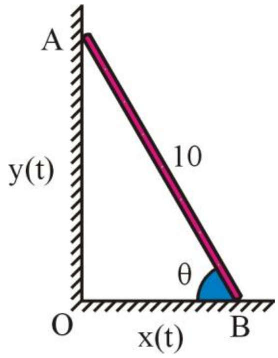
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

17.15 1)

Θέτουμε ΟΒ = x(t) και ΟΑ = y(t) οπότε είναι



ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$x^2(t)+y^2(t)=100$	α) $y'(t_o)=;$
$x'(t)=12$	β) $\theta'(t_o)=;$
$x(t_o)=8$	

α) $x^2(t)+y^2(t)=100 \overset{t=t_o}{\Rightarrow} x^2(t_o)+y^2(t_o)=100 \overset{x(t_o)=8}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 64+y^2(t_o)=100 \Rightarrow y^2(t_o)=36 \Rightarrow y(t_o)=\pm\sqrt{36} \overset{y(t_o)>0}{\Rightarrow} \boxed{y(t_o)=6}$

Οπότε

$x^2(t)+y^2(t)=100 \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} 2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \overset{t=t_o}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 2x(t_o)x'(t_o)+2y(t_o)y'(t_o)=0 \overset{\substack{x(t_o)=8\\ x'(t_o)=12\\ y(t_o)=6}}{\Rightarrow} 2\cdot 8\cdot 12+2\cdot 6\cdot y'(t_o)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12y'(t_o)=-192 \Rightarrow \boxed{y'(t_o)=-16}$

β) Είναι $\text{συνω}=\dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$. Οπότε

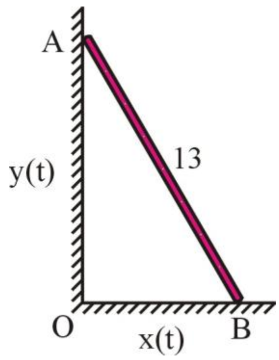
$\text{συν}\theta(t)=\dfrac{x(t)}{10} \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} -\text{ημ}\theta(t)\cdot\theta'(t)=\dfrac{x'(t)}{10} \overset{t=t_o}{\Rightarrow} -\text{ημ}\theta(t_o)\cdot\theta'(t_o)=\dfrac{x'(t_o)}{10} \Rightarrow$

$\overset{\text{ημ}\theta(t_o)=\frac{x(t_o)}{10}}{\Rightarrow} -\dfrac{x(t_o)}{\cancel{10}}\cdot\theta'(t_o)=\dfrac{y'(t_o)}{\cancel{10}} \Rightarrow \theta'(t_o)=-\dfrac{y'(t_o)}{x(t_o)} \overset{\substack{y'(t_o)=-16\\ x(t_o)=8}}{\Rightarrow} \theta'(t_o)=\dfrac{-16}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\theta'(t_o)=-2}$

17.15 2)

Στο διπλανό σχήμα θέτουμε ΟΒ = x(t) και ΟΑ = y(t) οπότε είναι



ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$x^2(t)+y^2(t)=169$	$y'(t_o)=;$
$x'(t_o)=3$	
$x(t_o)=5$	

$x^2(t)+y^2(t)=169 \overset{t=t_o}{\Rightarrow} x^2(t_o)+y^2(t_o)=169 \overset{x(t_o)=5}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 25+y^2(t_o)=169 \Rightarrow y^2(t_o)=144 \Rightarrow y(t_o)=\pm\sqrt{144} \overset{y(t_o)>0}{\Rightarrow} \boxed{y(t_o)=12}$

Οπότε

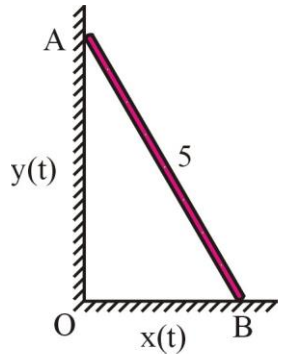
$x^2(t)+y^2(t)=169 \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} 2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \overset{t=t_o}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow 2x(t_o)x'(t_o)+2y(t_o)y'(t_o)=0 \overset{\substack{x(t_o)=5\\x'(t_o)=3\\y(t_o)=12}}{\Rightarrow} 2\cdot5\cdot3+2\cdot12\cdot y'(t_o)=0 \Rightarrow 24y'(t_o)=-30$$

$$\Rightarrow y'(t_o)=-\frac{30}{24} \Rightarrow \boxed{y'(t_o)=-\frac{5}{4}}$$

17.15 3)

Στο διπλανό σχήμα θέτουμε OB = x(t) και OA = y(t) οπότε είναι



ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$x^2(t)+y^2(t)=25$	α) $x'(t_o)=;$
$y(t_o)=4$	β) $E'_{OAB}(t_o)=;$
$y'(t)=-3$	

α) $x^2(t)+y^2(t)=25 \overset{t=t_o}{\Rightarrow} x^2(t_o)+y^2(t_o)=25 \overset{y(t_o)=4}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow x^2(t_o)+16=25 \Rightarrow x^2(t_o)=9 \Rightarrow x(t_o)=\pm\sqrt{9} \overset{x(t_o)>0}{\Rightarrow} \boxed{x(t_o)=3}$$

Οπότε

$$x^2(t)+y^2(t)=25 \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} 2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \overset{t=t_o}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2x(t_o)x'(t_o)+2y(t_o)y'(t_o)=0 \overset{\substack{x(t_o)=3\\y(t_o)=4\\y'(t_o)=-3}}{\Rightarrow} 2\cdot3\cdot x'(t_o)+2\cdot4\cdot(-3)=0 \Rightarrow 6x'(t_o)=24$$

$$\Rightarrow \boxed{x'(t_o)=4}$$

β) Είναι

$$E_{\text{τριγώνου}}=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2} \Rightarrow E(t)=\frac{x(t)\cdot y(t)}{2} \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow}$$

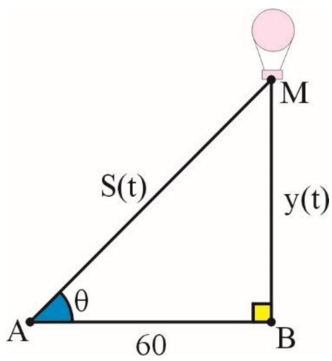
$$\Rightarrow E'(t)=\frac{x'(t)\cdot y(t)+x(t)\cdot y'(t)}{2} \overset{t=t_o}{\Rightarrow} E'(t_o)=\frac{x'(t_o)\cdot y(t_o)+x(t_o)\cdot y'(t_o)}{2}$$

$$\overset{\substack{x(t_o)=3\\x'(t_o)=4\\y(t_o)=4\\y'(t_o)=-3}}{\Rightarrow} E'(t_o)=\frac{3\cdot4+4\cdot(-3)}{2} \Rightarrow E'(t_o)=\frac{12-12}{2} \Rightarrow \boxed{E'(t_o)=0}$$

17.15 4)

Στο διπλανό σχήμα θέτουμε MB = y(t) και AM = S(t) οπότε είναι

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$S^2(t)=y^2(t)+60^2$	α) $\theta'(t_o)=;$
$y'(t)=1000$	β) $S'(t_o)=;$
$y(t_o)=80$	



α) Έχουμε

$$S^2(t)=y^2(t)+60^2 \overset{\text{θέτουμε } t=t_o}{\Rightarrow} S^2(t_o)=y^2(t_o)+3600 \overset{y(t_o)=80}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow S^2(t_o)=80^2+3600 \Rightarrow S^2(t_o)=10000 \overset{S(t_o)>0}{\Rightarrow} \boxed{S(t_o)=100}$$

Ακόμη είναι $\text{εφω}=\dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}$. Οπότε

$$\text{εφ}\theta(t)=\frac{y(t)}{60} \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} \frac{1}{\text{συν}^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{y'(t)}{60} \overset{t=t_o}{\Rightarrow} \frac{1}{\text{συν}^2\theta(t_o)}\cdot\theta'(t_o)=\frac{y'(t_o)}{60} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{συν}\theta(t_o)=\frac{60}{S(t_o)}}{\Rightarrow} \frac{1}{\dfrac{60^2}{S^2(t_o)}}\cdot\theta'(t_o)=\frac{y'(t_o)}{60} \Rightarrow \frac{S^2(t_o)}{60^{\cancel{2}}}\cdot\theta'(t_o)=\frac{y'(t_o)}{\cancel{60}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta'(t_o)=\frac{60\cdot y'(t_o)}{S^2(t_o)} \overset{\substack{y'(t_o)=1000\\ S(t_o)=100}}{\Rightarrow} \theta'(t_o)=\frac{6\cancel{0}\cdot 1000}{1000\cancel{0}} \Rightarrow \boxed{\theta'(t_o)=6}$$

β) Έχουμε

$$S^2(t)=y^2(t)+600^2 \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} \cancel{2}\cdot S(t)\cdot S'(t)=\cancel{2}\cdot y(t)\cdot y'(t) \overset{\text{θέτουμε } t=t_o}{\Rightarrow}$$

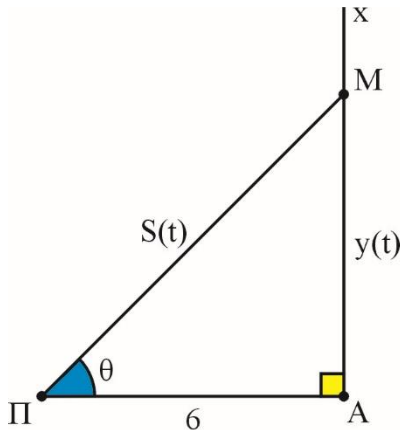
$$\Rightarrow S(t_o)\cdot S'(t_o)=y(t_o)\cdot y'(t_o) \overset{\substack{S(t_o)=100\\ y(t_o)=80\\ y'(t_o)=1000}}{\Rightarrow} \cancel{100}\cdot S'(t_o)=10\cancel{00}\cdot 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S'(t_o)=800}$$

17.15 5)

Στο διπλανό σχήμα θέτουμε $AM=y(t)$, οπότε είναι

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$S^2(t)=y^2(t)+36$ $y'(t)=12$ $y(t_o)=6$	$\theta'(t_o)=;$



Έχουμε

$$S^2(t)=y^2(t)+36 \overset{\text{θέτουμε } t=t_o}{\Rightarrow} S^2(t_o)=y^2(t_o)+36 \overset{y(t_o)=6}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow S^2(t_o)=36+36 \Rightarrow S^2(t_o)=2\cdot 36 \overset{S(t_o)>0}{\Rightarrow} \boxed{S(t_o)=6\sqrt{2}}$$

Ακόμη είναι $\text{εφω}=\dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}$. Οπότε

$$\text{εφ}\theta(t)=\frac{y(t)}{6} \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} \frac{1}{\text{συν}^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{y'(t)}{6} \overset{t=t_o}{\Rightarrow} \frac{1}{\text{συν}^2\theta(t_o)}\cdot\theta'(t_o)=\frac{y'(t_o)}{6} \Rightarrow$$

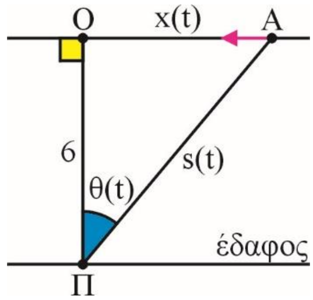
$$\stackrel{συνθ(t_o)=\frac{6}{S(t_o)}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{\dfrac{6^2}{S^2(t_o)}}\cdot θ'(t_o)=\frac{y'(t_o)}{6} \Rightarrow \frac{S^2(t_o)}{6^{\cancel{2}}}\cdot θ'(t_o)=\frac{y'(t_o)}{\cancel{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow θ'(t_o)=\frac{6\cdot y'(t_o)}{S^2(t_o)} \stackrel{\substack{y'(t_o)=12\\ S(t_o)=6\sqrt{2}\Rightarrow S^2(t_o)=72}}{\Rightarrow} θ'(t_o)=\frac{6\cdot 12}{72}\Rightarrow θ'(t_o)=\frac{72}{72}\Rightarrow \boxed{θ'(t_o)=1}$$

17.15 6)

Στο διπλανό σχήμα θέτουμε $ΟΑ = x(t)$ και $ΟΠ = s(t)$, οπότε είναι

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$s^2(t)=x^2(t)+36$	$θ'(t_o)=;$
$x'(t)=-200$	
$x(t_o)=8$	



Έχουμε

$$S^2(t)=x^2(t)+36 \stackrel{\text{θέτουμε } t=t_o}{\Rightarrow} S^2(t_o)=x^2(t_o)+36 \stackrel{x(t_o)=8}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow S^2(t_o)=64+36\Rightarrow S^2(t_o)=100 \stackrel{S(t_o)>0}{\Rightarrow} \boxed{S(t_o)=10}$$

Ακόμη είναι $εφω=\dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}$. Οπότε

$$εφθ(t)=\frac{x(t)}{6} \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} \frac{1}{συν^2θ(t)}\cdot θ'(t)=\frac{x'(t)}{6} \stackrel{t=t_o}{\Rightarrow} \frac{1}{συν^2θ(t_o)}\cdot θ'(t_o)=\frac{x'(t_o)}{6}\Rightarrow$$

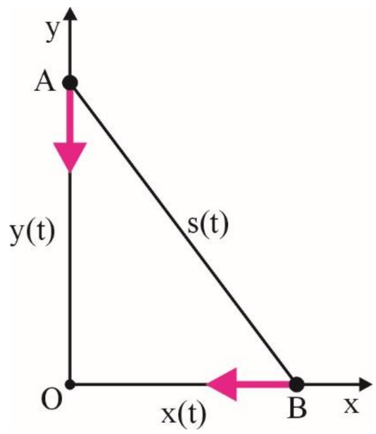
$$\stackrel{συνθ(t_o)=\frac{6}{S(t_o)}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{\dfrac{6^2}{S^2(t_o)}}\cdot θ'(t_o)=\frac{x'(t_o)}{6} \Rightarrow \frac{S^2(t_o)}{6^{\cancel{2}}}\cdot θ'(t_o)=\frac{x'(t_o)}{\cancel{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow θ'(t_o)=\frac{6\cdot x'(t_o)}{S^2(t_o)} \stackrel{\substack{x'(t_o)=-200\\ S(t_o)=10\Rightarrow S^2(t_o)=100}}{\Rightarrow} θ'(t_o)=\frac{6\cdot(-200)}{100}\Rightarrow \boxed{θ'(t_o)=-12}$$

17.15 7)

Στο διπλανό σχήμα θέτουμε $ΟΒ = x(t)$, $ΟΑ = y(t)$ και $ΑΒ = s(t)$, οπότε είναι

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)$	$y'(t_o)=;$
$x'(t)=-1$	
$y(t_o)=4$	
$x(t_o)=3$	
$s'(t_o)=-3$	



Έχουμε

$$S^2(t)=x^2(t)+y^2(t)\xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_o} S^2(t_o)=x^2(t_o)+y^2(t_o)\xrightarrow[y(t_o)=4]{x(t_o)=3}$$

$$\Rightarrow S^2(t_o)=3^2+4^2\Rightarrow S^2(t_o)=25\xrightarrow{S(t_o)>0}\boxed{S(t_o)=5}$$

Οπότε

$$s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)\xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}}\cancel{2}s(t)s'(t)=\cancel{2}x(t)x'(t)+\cancel{2}y(t)y'(t)\xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_o}$$

$$s(t_o)s'(t_o)=x(t_o)x'(t_o)+y(t_o)y'(t_o)\xrightarrow{\substack{x(t_o)=3\\ x'(t_o)=-1\\ y(t_o)=4\\ s(t_o)=5\\ s'(t_o)=-3}}5\cdot(-3)=3\cdot(-1)+4\cdot y'(t_o)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15=-3+4\cdot y'(t_o)\Rightarrow 4\cdot y'(t_o)=-12\Rightarrow\boxed{y'(t_o)=-3}$$