

16.2 1)

Ψάχνουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία που αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$

Αρχικά λοιπόν θα βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 - 4x$ με τον άξονα $x'x$. Έχουμε

$$y = x^2 - 4x \stackrel{y=0}{\Rightarrow} 0 = x^2 - 4x \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4$$

$$\text{Είναι } f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 στο $(0, f(0))$ θα είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} y - 0 = -4 \cdot (x - 0) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 : y = -4x}$$

$$\text{Ακόμη } f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0 \quad (3)$$

και

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4 \quad (4)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 στο $(4, f(4))$ θα είναι

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \stackrel{(3),(4)}{\Rightarrow} y - 0 = 4 \cdot (x - 4) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 : y = 4x - 16}$$

16.2 2)

Αρχικά θα βρούμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + 4x$, στα σημεία με τετμημένες 1 και 3 αντίστοιχα

$$\text{Είναι } f(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 στο $(1, f(1))$ θα είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} y - 3 = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 : y = 2x + 1}$$

$$\text{Ακόμη } f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 = 3 \quad (3)$$

και

$$f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 \quad (4)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 στο $(3, f(3))$ θα είναι

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} y - 3 = -2 \cdot (x - 3) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 : y = -2x + 9}$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Α θα πρέπει να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 .

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} \varepsilon_1 : y = 2x + 1 \\ \varepsilon_2 : y = -2x + 9 \end{cases}$ βρίσκουμε $x = 2$ και $y = 5$.

Άρα $A(2,5)$

16.2 3)

Αρχικά θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3$, στο σημείο με τετμημένη -1

$$\text{Είναι } f(-1) = (-1)^3 = -1 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 στο $(-1, f(-1))$ θα είναι

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \xRightarrow{(1),(2)} y + 1 = 3 \cdot (x + 1) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 : y = 3x + 2}$$

Πρέπει τώρα να βρούμε η ευθεία ε_1 που τέμνει την συνάρτηση f (εκτός από το σημείο επαφής)

Λύνοντας λοιπόν το σύστημα $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$ βρίσκουμε $(x, y) = (-1, -1)$ και

$(x, y) = (2, 8)$. Προφανώς το σημείο $(-1, -1)$ είναι το σημείο επαφής και άρα το σημείο A θα είναι το $\boxed{A(2,8)}$