

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

16.16 1)

Στη σχέση $f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$ θέτουμε $x = 1$ και έχουμε

$$f(1^3 + 1 + 1) = 7 \cdot 1^3 - 1 \Rightarrow f(3) = 6 \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x^3 + x + 1)(3x^2 + 1) = 21x^2 - 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1}$$

$$\Rightarrow f'(1^3 + 1 + 1)(3 \cdot 1^2 + 1) = 21 \cdot 1^2 - 1 \Rightarrow 4f'(3) = 20 \Rightarrow f'(3) = 5 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 3$ είναι

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \xrightarrow{(1), (2)} y - 6 = 5(x - 3) \Rightarrow y - 6 = 5x - 15 \Rightarrow \boxed{y = 5x - 9}$$

16.16 2)

Στη σχέση $f(x^2) = 1 + x^3$ θέτουμε $x = 2$ και έχουμε $f(2^2) = 1 + 2^3 \Rightarrow f(4) = 9 \quad (1)$

Ακόμη

$$f(x^2) = 1 + x^3 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x^2)2x = 3x^2 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=2} 4f'(4) = 3 \cdot 2^2 \Rightarrow f'(4) = 3 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 4$ είναι

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \xrightarrow{(1), (2)} y - 9 = 3(x - 4) \Rightarrow y - 9 = 3x - 12 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 3}$$

16.16 3)

Στη σχέση $g(x) = f(2x^2 + x + 1) + 3$ θέτουμε $x = 0$ και έχουμε

$$g(0) = f(2 \cdot 0^2 + 0 + 1) + 3 \Rightarrow g(0) = f(1) + 3 \Rightarrow g(0) = 1 + 3 \Rightarrow g(0) = 4 \quad (1)$$

Ακόμη

$$g(x) = f(2x^2 + x + 1) + 3 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g'(x) = f'(2x^2 + x + 1)(4x + 1) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0}$$

$$g'(0) = f'(2 \cdot 0^2 + 0 + 1)(4 \cdot 0 + 1) \Rightarrow g'(0) = f'(1) \Rightarrow g'(0) = 1 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \xrightarrow{(1), (2)} y - 4 = 1 \cdot x \Rightarrow \boxed{y = x + 4}$$

16.16 4)

Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$ εφάπτεται στην C_f στο σημείο $M(3, f(3))$ θα ισχύει

- το σημείο $M(3, f(3))$ ικανοποιεί την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon: y = 2x - 2$ δηλαδή

$$\text{θα ισχύει } f(3) = 2 \cdot 3 - 2 \Rightarrow f(3) = 4 \quad (1)$$

$$\bullet f'(3) = \lambda_{\varepsilon} \Rightarrow f'(3) = 2 \quad (2)$$

Στη σχέση $g(x) = f(e^{x-1} + 2x)$ θέτουμε $x = 1$ και έχουμε

$$g(1) = f(e^{1-1} + 2 \cdot 1) \Rightarrow g(1) = f(3) \xrightarrow{(1)} g(1) = 4 \quad (3)$$

Ακόμη

$$g(x) = f(e^{x-1} + 2x) \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g'(x) = f'(e^{x-1} + 2x)(e^{x-1} + 2) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1}$$

$$g'(1) = f'(e^{1-1} + 2 \cdot 1)(e^{1-1} + 2) \Rightarrow g'(1) = 3f'(3) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} g'(1) = 6 \quad (4)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \stackrel{(3), (4)}{\Rightarrow} y - 4 = 6 \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 4 = 6x - 6 \Rightarrow \boxed{y = 6x - 2}$$

16.16 5)

Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y = 13x - 7$ εφάπτεται στην C_g στο σημείο $M(1, g(1))$ θα ισχύει

- το σημείο $M(1, g(1))$ ικανοποιεί την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon: y = 13x - 7$ δηλαδή θα ισχύει $g(1) = 13 \cdot 1 - 7 \Rightarrow g(1) = 6 \quad (1)$

- $g'(1) = \lambda_\varepsilon \Rightarrow g'(1) = 13 \quad (2)$

Στη σχέση $g(x) = (x^2 + 2)f(x^3 + 1)$ θέτουμε $x = 1$ και έχουμε

$$g(1) = (1^2 + 2)f(1^3 + 1) \Rightarrow g(1) = 3f(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 6 = 3f(2) \Rightarrow f(2) = 2 \quad (3)$$

Ακόμη

$$g(x) = (x^2 + 2)f(x^3 + 1) \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g'(x) = 2xf(x^3 + 1) + (x^2 + 2)f'(x^3 + 1)3x^2 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1}$$

$$\Rightarrow g'(1) = 2 \cdot 1 \cdot f(1^3 + 1) + (1^2 + 2)f'(1^3 + 1) \cdot 3 \cdot 1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(1) = 2 \cdot f(2) + 9f'(2) \stackrel{(2), (3)}{\Rightarrow} 13 = 2 \cdot 2 + 9f'(2) \Rightarrow 9f'(2) = 9 \Rightarrow f'(2) = 1 \quad (4)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$ είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \stackrel{(3), (4)}{\Rightarrow} y - 2 = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 2 = x - 2 \Rightarrow \boxed{y = x}$$

16.16 6)

Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 3$ εφάπτεται στην C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ θα ισχύει

- το σημείο $M(1, f(1))$ ικανοποιεί την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon: y = 2x + 3$ δηλαδή θα ισχύει $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 \Rightarrow f(1) = 5 \quad (1)$

- $f'(1) = \lambda_\varepsilon \Rightarrow f'(1) = 2 \quad (2)$

Στη σχέση $g(x) = x \cdot f(x)$ θέτουμε $x = 1$ και έχουμε

$$g(1) = 1 \cdot f(1) \Rightarrow g(1) = f(1) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g(1) = 5 \quad (3)$$

Ακόμη

$$g(x) = x \cdot f(x) \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g'(x) = f(x) + xf'(x) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1} g'(1) = f(1) + 1 \cdot f'(1) \stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow g'(1) = 5 + 2 \Rightarrow g'(1) = 7 \quad (4)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \stackrel{(3), (4)}{\Rightarrow} y - 5 = 7 \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 5 = 7x - 7 \Rightarrow \boxed{y = 7x - 2}$$