

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

16.10 1)

Καταρχήν πρέπει να βρούμε τα κοινά σημεία των δύο γραμμών (της C_f και της ευθείας). Γι αυτό λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = x^3 + 2x - 1 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 3 = x^3 + 2x - 1 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 0 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \xrightarrow{\substack{x^3 - 3x + 2: \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παραγοντοποίηση με Horner}}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)^2(x+2) = 0 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ ή } x = 1 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -13 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Άρα τα κοινά τους σημεία είναι τα $(-2, -13)$ και $(1, 2)$

Έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 2$ και παρατηρούμε ότι

$$\left. \begin{matrix} f'(-2) = 14 \\ \lambda_\varepsilon = 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f'(-2) \neq \lambda_\varepsilon \text{ άρα η ευθεία } \varepsilon \text{ στο κοινό τους σημείο } (-2, -13)$$

είναι απλή τέμνουσα και όχι εφαπτόμενη

$$\left. \begin{matrix} f'(1) = 5 \\ \lambda_\varepsilon = 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f'(1) = \lambda_\varepsilon \text{ άρα η ευθεία } \varepsilon \text{ στο κοινό τους σημείο } (1, 2) \text{ είναι και}$$

εφαπτόμενη

16.10 2)

Θα βρούμε πρώτα τα κοινά σημεία της ευθείας $y = x - 3$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f λύνοντας το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x^2 - 3x + 1 = x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \Delta = 0, x = 2 \end{cases}$$

Οπότε η ευθεία $\varepsilon: y = x - 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της f στο σημείο $(2, -1)$

Όμως $f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow \boxed{f'(2) = 1 = \lambda_\varepsilon}$, που σημαίνει ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x - 3$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f

16.10 3)

Θα βρούμε πρώτα τα σημεία τομής της ευθείας $\varepsilon: y = 4x - 9$ με την γραφική παράσταση της f λύνοντας το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} y = 4x - 9 \\ y = 2x^2 - 4x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 9 \\ 2x^2 - 4x - 1 = 4x - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 9 \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \Delta = 0, x = 2 \end{cases}$$

Οπότε η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - 9$ τέμνει την γραφική παράσταση της f στο σημείο $(2, -1)$

Όμως $f'(x) = 4x - 4 \Rightarrow \boxed{f'(2) = 4 = \lambda_\varepsilon}$, που σημαίνει ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - 9$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f

16.10 4)

Θα βρούμε πρώτα τα σημεία τομής της ευθείας $\varepsilon: y = 3x + 1$ με την γραφική παράσταση της f λύνοντας το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x^3 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 3x - 1 = x^3 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x^3 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \xRightarrow{\substack{\text{παραγοντοποίηση} \\ \text{με Horner}}} x = -1 \text{ ή } x = 2$$

για $x = -1 \Rightarrow y = 3(-1) - 1 = -4$

για $x = 2 \Rightarrow y = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

Οπότε η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 1$ έχει δύο κοινά σημεία την γραφική παράσταση της f , τα $A(-1, -4)$ και $B(2, 5)$

Όμως

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \boxed{f'(-1) = 3 = \lambda_\varepsilon}$ που σημαίνει ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - 9$ στο σημείο $A(-1, -4)$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f

και

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \boxed{f'(2) = 12 \neq \lambda_\varepsilon}$ που σημαίνει ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - 9$ στο σημείο $B(2, 5)$ δεν εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f

16.10 5)

Καταρχήν πρέπει να βρούμε τα κοινά σημεία των δύο γραμμών (της C_f και της ευθείας). Γι αυτό λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = x^3 + x^2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 = x^3 + x^2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \xRightarrow{\substack{x^3 + x^2 - x - 1: \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παραγοντοποίηση με Horner}}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x+1)^2(x-1) = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ή } x = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Άρα τα κοινά τους σημεία είναι τα $(-1, 0)$ και $(1, 2)$

Έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 2x$ και παρατηρούμε ότι

$\left. \begin{matrix} f'(-1) = 1 \\ \lambda_\varepsilon = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f'(-1) = \lambda_\varepsilon$ άρα η ευθεία ε στο κοινό τους σημείο $(-1, 0)$ είναι και εφαπτόμενη

$\left. \begin{matrix} f'(1) = 5 \\ \lambda_\varepsilon = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f'(1) \neq \lambda_\varepsilon$ άρα η ευθεία ε στο κοινό τους σημείο $(1, 2)$ είναι απλή τέμνουσα και όχι εφαπτόμενη

16.10 6)

Αρχικά θα βρούμε την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(3, f(3) = 2)$

Είναι $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 \Rightarrow f'(3) = 2$

Επομένως η εφαπτόμενη ε της C_f στο σημείο $(3, 2)$ έχει εξίσωση

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Rightarrow y - 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y - 2 = 2x - 6 \Rightarrow \boxed{\varepsilon: y = 2x - 4}$$

Θα βρούμε τώρα τα σημεία τομής της ευθείας ε με την γραφική παράσταση της g λύνοντας το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x^2 + 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ \cancel{2x} - \cancel{4} = x^2 + \cancel{2x} - \cancel{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 0 \end{cases}$$

Οπότε η ευθεία ε τέμνει την γραφική παράσταση της g στο σημείο $(0, -4)$

Όμως $g'(x) = 2x + 2 \Rightarrow \boxed{g'(0) = 2 = \lambda_\varepsilon}$, που σημαίνει ότι η ευθεία ε εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της g

16.10 7)

Αρχικά θα βρούμε την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(-1, 1)$

$$\text{Είναι } f'(x) = e^{x^2-x-2} (2x-1) \Rightarrow f'(-1) = e^{(-1)^2-(-1)-2} [2(-1)-1] = -3$$

Επομένως η εφαπτόμενη ε της C_f στο σημείο $(-1, 1)$ έχει εξίσωση

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow y - 1 = -3(x + 1) \Rightarrow y - 1 = -3x - 3 \Rightarrow \boxed{\varepsilon: y = -3x - 2}$$

Θα βρούμε τώρα τα σημεία τομής της ευθείας ε με την γραφική παράσταση της g λύνοντας το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -3x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 5x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ -3x - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ -6x - 4 = x^2 - 10x \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -8 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Οπότε η ευθεία ε τέμνει την γραφική παράσταση της g στο σημείο $(2, -8)$

Όμως $g'(x) = x - 5 \Rightarrow \boxed{g'(2) = -3 = \lambda_\varepsilon}$, που σημαίνει ότι η ευθεία ε εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της g