

14.12 1)

Είναι $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & , x \geq 1 \\ -x+1 & , x < 1 \end{cases}$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \stackrel{f(x)=x-1}{=} \stackrel{f(1)=1-1=0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \stackrel{f(x)=-x+1}{=} \stackrel{f(1)=1-1=0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = -1$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$

άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

14.12 2)

Είναι $f(x) = |2x+8| = \begin{cases} 2x+8 & , x \geq -4 \\ -2x-8 & , x < -4 \end{cases}$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{f(x) - f(-4)}{x+4} \stackrel{f(x)=2x+8}{=} \stackrel{f(-4)=2(-4)+8=0}{=} \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2x+8}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2(\cancel{x+4})}{\cancel{x+4}} = 2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{f(x) - f(-4)}{x+4} \stackrel{f(x)=-2x-8}{=} \stackrel{f(-4)=-2(-4)-8=0}{=} \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{-2x-8}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{-2(\cancel{x+4})}{\cancel{x+4}} = -2$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{f(x) - f(-4)}{x+4} \neq \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{f(x) - f(-4)}{x+4}$, άρα η συνάρτηση δεν

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -4$

14.12 3)

Είναι

$$f(x) = x^2 - |x+3| + 5 = \begin{cases} x^2 - (x+3) + 5 = x^2 - x - 3 + 5 = x^2 - x + 2 & , x \geq -3 \\ x^2 - (-x-3) + 5 = x^2 + x + 3 + 5 = x^2 + x + 8 & , x < -3 \end{cases}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} &\stackrel{f(x)=x^2-x+2}{=} \stackrel{f(-3)=(-3)^2-(-3)+2=14}{=} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 2 - 14}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(\cancel{x+3})(x-4)}{\cancel{x+3}} = -3-4 = -7 \end{aligned}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} \stackrel{f(x)=x^2+x+8}{=} \stackrel{f(-3)=(-3)^2+(-3)+2=14}{=} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x + 8 - 14}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x+3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{\cancel{x+3}} = -3-2 = -5$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3}$, άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -3$

14.12 4)

$$\text{Είναι } f(x) = |x^2 + 7x + 10| = \begin{cases} x^2 + 7x + 10 & , x \in (-\infty, -5] \cup [-2, +\infty) \\ -x^2 - 7x - 10 & , x \in [-5, -2] \end{cases}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} & \stackrel{f(x)=-x^2-7x-10}{=} \stackrel{f(-3)=-(-3)^2-7(-3)-10=2}{=} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-x^2-7x-10-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-x^2-7x-12}{x+3} = \\ & = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\cancel{-(x+3)}(x+4)}{\cancel{x+3}} = -(-3+4) = -1 \end{aligned}$$

14.12 5)

$$\text{Είναι } f(x) = 3x + |2x - x^2| = \begin{cases} 3x + 2x - x^2 = -x^2 + 5x & , x \in [0, 2] \\ 3x - 2x + x^2 = x^2 + x & , x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \end{cases}$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \stackrel{f(x)=x^2+x}{=} \stackrel{f(2)=2^2+2=6}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2+3 = 5$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \stackrel{f(x)=-x^2+5x}{=} \stackrel{f(2)=-2^2+5 \cdot 2=6}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2+5x-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = -(2-3) = 1$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$