

12.Γ1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 2} - \lambda x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} - \lambda x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - \lambda x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - \lambda x \right] \stackrel{x>0}{|x|=x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - \lambda x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - \lambda \right) = \\ &= (+\infty) \left(\sqrt{1 + 0 - 0} - \lambda \right) = (+\infty)(1 - \lambda)\end{aligned}$$

Οπότε

Αν $\boxed{\lambda < 1} \Rightarrow 1 - \lambda > 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{+\infty}$

Αν $\boxed{\lambda > 1} \Rightarrow 1 - \lambda < 0$, το ζητούμενο όριο είναι $\boxed{-\infty}$

Αν $\boxed{\lambda = 1}$, το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 2} - x \right) &\stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x - 2} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + x - 2} + x \right)}{\sqrt{x^2 + x - 2} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}^2 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + x} \stackrel{x>0}{|x|=x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - 2 - \cancel{x^2}}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 - \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1 - 0}{1 + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

12.Γ2

Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)}{x+1}$ και $\varphi(x) = g(x)(x^2 - x - 2)$

οπότε $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 2$ (1) , $\lim_{x \rightarrow -1} \varphi(x) = -3$ (2) , και ακόμη

$$\left. \begin{aligned}h(x) &= \frac{f(x)}{x+1} \Rightarrow f(x) = (x+1)h(x) \\ \varphi(x) &= g(x)(x^2 - x - 2) \Rightarrow g(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2 - x - 2}\end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f(x) \cdot g(x) = (x+1)h(x) \frac{\varphi(x)}{x^2 - x - 2} \Rightarrow$$

$$\stackrel{x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)}{\Rightarrow} f(x) \cdot g(x) = \cancel{(x+1)}h(x) \frac{\varphi(x)}{\cancel{(x+1)}(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = \frac{h(x)\varphi(x)}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} [f(x) \cdot g(x)] = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \varphi(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x-2)}$$

$$\stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -1} [f(x) \cdot g(x)] = \frac{2 \cdot (-3)}{-3} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) \cdot g(x)] = 2}$$

12.Γ3

α) Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)-2}{x-1}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$ (1) και ακόμη

$$h(x) = \frac{f(x)-2}{x-1} \Rightarrow f(x)-2 = (x-1)h(x) \Rightarrow f(x) = (x-1)h(x) + 2$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)h(x) + 2] = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \lim_{x \rightarrow 1} h(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2 \stackrel{(1)}{=} 0 \cdot 3 + 2 = \boxed{2}$$

β) Για $x \geq 2$ έχουμε

$$3x^2 - 8x + 4 \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\stackrel{\text{διαιρούμε με } x-2 > 0}{\Rightarrow} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x-2} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - 4}{x-2} \Rightarrow$$

$$\stackrel{3x^2 - 8x + 4 = (3x-4)(x-2)}{\Rightarrow} \frac{(3x-4)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} \leq \frac{f(x)}{x-2} \leq \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow$$

$$\stackrel{\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-4) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 4}{\Rightarrow} 3x-4 \leq \frac{f(x)}{x-2} \leq x+2 \stackrel{(\text{κριτήριο παρεμβολής})}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x-2} = 4} \quad (1)$$

Ομοίως για $x < 2$ έχουμε

$$3x^2 - 8x + 4 \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\stackrel{\text{διαιρούμε με } x-2 < 0}{\Rightarrow} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x-2} \geq f(x) \geq \frac{x^2 - 4}{x-2} \Rightarrow$$

$$\stackrel{3x^2 - 8x + 4 = (3x-4)(x-2)}{\Rightarrow} \frac{(3x-4)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} \geq \frac{f(x)}{x-2} \geq \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow$$

$$\stackrel{\lim_{x \rightarrow 2^-} (3x-4) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4}{\Rightarrow} 3x-4 \geq \frac{f(x)}{x-2} \geq x+2 \stackrel{(\text{κριτήριο παρεμβολής})}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{x-2} = 4} \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1), (2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 4$$

γ) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής θα ισχύει

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow f(1) = 2$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow f(2) = 4$$

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = e^{f(x)-3} - x$

Η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} g(1) &= e^{f(1)-3} - 1 \stackrel{f(1)=2}{=} e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0 \\ g(2) &= e^{f(2)-3} - 2 \stackrel{f(2)=4}{=} e^1 - 1 = e - 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(1)g(2) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση g άρα και η εξίσωση $e^{f(x)-3} = x$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$

12.Γ4

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + \alpha x + \beta) = (-1)^2 + \alpha(-1) + \beta = -\alpha + \beta + 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = -1 + 1 = 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + \alpha x + \beta) = (-1)^2 + \alpha(-1) + \beta = -\alpha + \beta + 1$

ήταν διάφορο από το μηδέν τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ δεν θα μπορούσε να κάνει -1 (θα έκανε είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν θα υπήρχε)

Αναγκασία λοιπόν θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + \alpha x + \beta) = 0 \Rightarrow -\alpha + \beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta = \alpha - 1 \quad (1)$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + \alpha x + \alpha - 1}{x + 1} = -1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1) + (\alpha x + \alpha)}{x + 1} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1) + \alpha(x + 1)}{x + 1} = -1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x - 1 + \alpha)}{\cancel{x+1}} = -1 \Rightarrow -1 - 1 + \alpha = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

$$\text{Τέλος } (1) \stackrel{\alpha=-1}{\Rightarrow} \boxed{\beta = -2}$$

12.Γ5

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= -2 < 0 \\ f(2) &= 4 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1)f(2) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = 0 \quad (1)$$

Ακόμη

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 3]$

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 4 > 0 \\ f(3) &= -5 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2)f(3) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_2) = 0 \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ και άρα η f δεν είναι 1-1

12.Γ6

α) Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 6x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x \cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{6 \cdot 1}{1+1} = 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{18\sqrt{x} - 18}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{18(\sqrt{x} - 1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{18(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{18 \cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{18}{(1+2)(\sqrt{1} + 1)} = 3 \end{aligned}$$

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} \frac{6x^2 - 6x}{x^2 - 1} \leq f(x) \leq \frac{18\sqrt{x} - 18}{x^2 + x - 2} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 6x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{18\sqrt{x} - 18}{x^2 + x - 2} = 3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \Rightarrow \boxed{f(1) = 3} \end{array}$$

β) $f(1) \cdot f(8) > 21 \Rightarrow 3 \cdot f(8) > 21 \Rightarrow f(8) > 7$

Άρα

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 8]$

$$\left. \begin{aligned} f(1) = 3 < 7 \\ f(8) > 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) < 7 < f(8)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, η εξίσωση $f(x) = 7$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 8)$

12.Γ7

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= a(-1)^3 + b(-1)^2 + \gamma(-1) + \delta = -a + b - \gamma + \delta < 0 \\ \left(\begin{array}{l} \text{διότι} \\ a + \gamma > 0 \Rightarrow -a - \gamma < 0 \\ a + b + \gamma + \delta < 0 \Rightarrow b + \delta < -a - \gamma \Rightarrow b + \delta < 0 \end{array} \right) &\Rightarrow -a - \gamma + b + \delta < 0 \\ f(0) &= a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + \gamma \cdot 0 + \delta = \delta > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-1)f(0) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta = 0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$

Επίσης, η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \alpha \cdot 0^3 + \beta \cdot 0^2 + \gamma \cdot 0 + \delta = \delta > 0 \\ f(1) &= \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1^2 + \gamma \cdot 1 + \delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Επομένως η εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$, μία στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία διάστημα $(0, 1)$

12.Γ8

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(4, 2)$ θα είναι $f(1) = 5$ και $f(4) = 2$. Παρατηρούμε ότι $1 < 4$ και $f(1) > f(4)$ οπότε η f **αποκλείεται να είναι γνησίως αύξουσα**. Και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη συμπεραίνουμε ότι υποχρεωτικά θα είναι γνησίως φθίνουσα

β) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη θα είναι και $1 - 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f\left(3 + f^{-1}(x^2 - 4x)\right) &\stackrel{f(4)=2}{=} 2 \Rightarrow f\left(3 + f^{-1}(x^2 - 4x)\right) = f(4) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow 3 + f^{-1}(x^2 - 4x) = 4 \Rightarrow f^{-1}(x^2 - 4x) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f\left(f^{-1}(x^2 - 4x)\right) = f(1) \stackrel{\substack{f(f^{-1}(x^2-4x))=x^2-4x \\ f(1)=5}}{\Rightarrow} x^2 - 4x = 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \\ &\Rightarrow \Delta = 36 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4+6}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = 5} \\ x_2 = \frac{4-6}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = -1} \end{cases} \end{aligned}$$

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}(4x - 10) - 3\right) &\stackrel{f(1)=5}{<} 5 \Rightarrow f\left(f^{-1}(4x - 10) - 3\right) < f(1) \stackrel{f:\searrow}{\Rightarrow} f^{-1}(4x - 10) - 3 > 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f^{-1}(4x - 10) > 4 \Rightarrow f^{-1}(4x - 10) > 4 \stackrel{f:\searrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(4x - 10)\right) < f(4) \stackrel{f(4)=2}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow 4x - 10 < 2 \Rightarrow 4x < 12 \Rightarrow \boxed{x < 3} \end{aligned}$$

12.Γ9

$$\begin{aligned} \alpha) \quad 2x^3 - x^2 - 1 &\leq f(x) \leq x^4 + x^2 - 2x \stackrel{x=1}{\Rightarrow} 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 1 \leq f(1) \leq 1^4 + 1^2 - 2 \cdot 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq f(1) \leq 0 \Rightarrow f(1) = 0 \end{aligned}$$

β) i) Για $x > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 - 1 &\leq f(x) \leq x^4 + x^2 - 2x \stackrel{\text{διαιρούμε με } x-1 > 0}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{2x^3 - x^2 - 1: \begin{cases} \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παραγοντοποίηση με Horner} \end{cases}}{\Rightarrow} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x-1} \stackrel{x^4 + x^2 - 2x: \begin{cases} \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παραγοντοποίηση με Horner} \end{cases}}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)}(2x^2 + x + 1)}{\cancel{x-1}} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{\cancel{(x-1)}(x^3 + x^2 + 2x)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x^2 + 2x) = 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x + 1 \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq x^3 + x^2 + 2x \quad (\text{κριτήριο παρεμβολής}) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 4} \quad (1)$$

ii) Για $x > 1$ έχουμε

$$2x^3 - x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^4 + x^2 - 2x \quad \text{διαιρούμε με } x-1 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x-1} \geq \frac{f(x)}{x-1} \geq \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x-1} \quad \begin{matrix} 2x^3 - x^2 - 1: \begin{cases} \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παράγοντοποίηση με Horner} \end{cases} \\ x^4 + x^2 - 2x: \begin{cases} \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παράγοντοποίηση με Horner} \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(2x^2 + x + 1)}{x-1} \geq \frac{f(x)}{x-1} \geq \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + 2x)}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x + 1 \geq \frac{f(x)}{x-1} \geq x^3 + x^2 + 2x \quad \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + x^2 + 2x) = 4 \\ \text{κριτήριο παρεμβολής} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 4} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\eta\mu(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\eta\mu(x-1)}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$ (θέτουμε $y = x-1$ όταν $x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0$)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ (ερώτημα β)

$= \frac{4}{1} = \boxed{4}$

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + x^2 - 2x) = +\infty$

Οπότε όταν $x \rightarrow +\infty$ είναι $2x^3 - x^2 - 1 > 0$ και $x^4 + x^2 - 2x > 0$ άρα προφανώς και $f(x) > 0$. Οπότε

$$2x^3 - x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^4 + x^2 - 2x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2x^3 - x^2 - 1} \geq \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{x^4 + x^2 - 2x} \quad \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^3 - x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 + x^2 + 2x} = 0 \\ \text{κριτήριο παρεμβολής} \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad (3)$$

Έτσι

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \\ \text{κριτήριο παρεμβολής} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{f(x)} = 0} \quad (3)$$

12.Γ10

α) i) $(f \circ f)(x) = 3x - 4 \quad \begin{matrix} \text{θέτουμε } x=3 \\ = \end{matrix} f(f(3)) = 3 \cdot 3 - 4 \Rightarrow \boxed{f(f(3)) = 5}$

ii) $(f \circ f)(x) = 3x - 4 \quad \begin{matrix} \text{θέτουμε } x=5 \\ = \end{matrix} f(f(5)) = 3 \cdot 5 - 4 \Rightarrow \boxed{f(f(5)) = 11}$

β) i) $\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \quad \begin{matrix} (f \circ f)(x) = 3x - 4 \\ \Rightarrow \end{matrix} 3x_1 - 4 = 3x_2 - 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι $1-1$

$$\text{ii) } (f \circ f)(x) = 3x - 4 \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)}{=} f(f(f^{-1}(x))) = 3 \cdot f^{-1}(x) - 4 \stackrel{f(f^{-1}(x))=x}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot f^{-1}(x) - 4 \Rightarrow f(x) + 4 = 3 \cdot f^{-1}(x) \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{f(x) + 4}{3}}$$

$$\gamma) \quad (f \circ f)(x) = 3x - 4 \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)}{\Rightarrow} f(f(x)) = 3f(x) - 4$$

$$\stackrel{f(f(5))=11 \Rightarrow f(5)=f^{-1}(11)}{\Rightarrow} 3f(x) - 4 = f^{-1}(11) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(f(f(x))) = f(5) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(f(x)) = 5 \stackrel{f(f(3))=5}{\Leftrightarrow} f(f(x)) = f(f(3)) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(3) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{x=3}$$

12.Γ11

Θέτουμε $h(x) = \frac{(x-2)f(x)}{\eta\mu(x^2-4) + \sqrt{x-1}-1}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \frac{2}{9}$ (1) και ακόμη

$$h(x) = \frac{(x-2)f(x)}{\eta\mu(x^2-4) + \sqrt{x-1}-1} \Rightarrow h(x) [\eta\mu(x^2-4) + \sqrt{x-1}-1] = (x-2)f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{h(x) [\eta\mu(x^2-4) + \sqrt{x-1}-1]}{x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = h(x) \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x-2} + h(x) \frac{(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}$$

$$\Rightarrow f(x) = h(x) \cdot \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-4}{x-2} + h(x) \cdot \frac{(\sqrt{x-1}-1) \cdot (\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = h(x) \cdot \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4} \cdot \frac{\cancel{x-2}(x+2)}{\cancel{x-2}} + h(x) \cdot \frac{\sqrt{x-1}^2 - 1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = h(x) \cdot (x+2) \cdot \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4} + h(x) \cdot \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(\sqrt{x-1}+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = h(x) \cdot (x+2) \cdot \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4} + \frac{h(x)}{(\sqrt{x-1}+1)} \quad (2)$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4} \stackrel{\text{θέτουμε } y=x^2-4 \text{ όταν } x \rightarrow 2, y \rightarrow 0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1 \quad (3)$$

Οπότε

$$(2) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \cdot (x+2) \cdot \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{(\sqrt{x-1}+1)} \stackrel{(1),(3)}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \cdot (x+2) \cdot \frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{2}{9} \cdot (2+2) \cdot 1 + \frac{\frac{2}{9}}{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{1}$$

12.Γ12

Έχουμε ισοδύναμα $f^2(x) = 9 \Leftrightarrow f(x) = -3$ ή $f(x) = 3$

Τώρα

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) < 3 < f(1)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{f(x_1) = 3}$$

Ομοίως

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 4 \\ f(2) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) < -3 < f(1) \quad \text{και} \quad f(2) < 3 < f(1)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 2)$ τέτοια ώστε

$$\boxed{f(x_2) = -3} \quad \text{και} \quad \boxed{f(x_3) = 3}$$

Οι αριθμοί x_1, x_2 και x_3 είναι προφανώς ρίζες της εξίσωσης $f^2(x) = 9$, είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ανήκουν όλοι στο διάστημα $(0, 2)$

12.Γ13

Έχουμε

$$f(3x) > f(3x+3) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f(0) > f(3) \xrightarrow{f(0)=0} \boxed{f(3) < 0}$$

$$f(3x) > f(3x+3) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=\frac{1}{3}} f\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) > f\left(3 \cdot \frac{1}{3} + 3\right) \Rightarrow f(1) > f(4) \xrightarrow{f(4)=0} \boxed{f(1) > 0}$$

Έτσι

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) > 0 \\ f(3) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(3) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ με $f(\xi) = 0$

12.Γ14

Θέτουμε $h: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f^2(x) - 3f(x) + x$

Παρατηρούμε ότι

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = f^2(0) - 3f(0) = f(0)[f(0) - 3] \\ h(3) = f^2(3) - 3f(3) + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) \cdot h(3) < 0$$

$\begin{array}{l} 0 < f(x) < 3 \Rightarrow \\ f(0) > 0 \text{ και } f(0) - 3 < 0 \\ \text{Av } y = f(3) \text{ τότε} \\ f^2(3) - 3f(3) + 3 = y^2 - 3y + 3 > 0 \text{ διότι } \Delta = -3 < 0 \end{array}$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f^2(\xi) = 3f(\xi) - \xi$$

12.Γ15

α) Θέτουμε

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x) = f(x) - \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$$

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(2, +\infty)$ είναι $h(x) \neq 0$

Οπότε στο διάστημα $(2, +\infty)$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} h: \text{συνεχής} \\ h: \text{δεν μηδενίζεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \ h \ \text{διατηρεί πρόσημο}$$

$$\text{και αφού } h(3) = f(3) - \frac{3^2 + 4 \cdot 3 - 12}{3 - 2} = \frac{f(3) - 19}{1} = \frac{19}{2} - 9 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow h(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h(x) = f(x) - \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}}{x - 2} > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}, \text{ για κάθε}$$

$$x \in (2, +\infty)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{Επομένως } \left. \begin{array}{l} f(x) > \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

β) Θέτουμε

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = f(x) - \frac{2x^2 - 8}{x - 2}$$

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(-\infty, 2)$ είναι $g(x) \neq 0$

Οπότε στο διάστημα $(-\infty, 2)$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} g: \text{συνεχής} \\ g: \text{δεν μηδενίζεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \ g \ \text{διατηρεί πρόσημο}$$

$$\text{και αφού } g(1) = f(1) - \frac{2 \cdot 1^2 - 8}{1 - 2} = 5 - 6 = -1 < 0 \Rightarrow g(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g(x) = f(x) - \frac{2x^2 - 8}{x - 2}}{x - 2} < 0 \Rightarrow f(x) < \frac{2x^2 - 8}{x - 2}, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 2)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$\text{Επομένως } \left. \begin{array}{l} f(x) < \frac{2x^2 - 8}{x - 2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

γ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$ οπότε θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

Στο α) ερώτημα είδαμε ότι για κάθε $x > 2$ είναι

$$\begin{aligned} f(x) &> \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} \stackrel{x^2 + 4x - 12 = (x-2)(x+6)}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x+6)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+6) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \geq 8 \quad (1) \end{aligned}$$

Ακόμη στο β) ερώτημα είδαμε ότι για κάθε $x < 2$ είναι

$$\begin{aligned} f(x) &< \frac{2x^2 - 8}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} \stackrel{2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 2^-} 2(x+2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \leq 8 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά } (1), (2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$