

12.B1

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - x - 2$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 3]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(2) = f(2) - 2 - 2 = f(2) - 4 \geq 0 \\ h(3) = f(3) - 3 - 2 = f(3) - 5 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h(2)h(3) \leq 0}$$

Αν $h(2) = 0$ τότε για $\xi = 2 \in [2, 3]$ έχουμε $h(\xi) = 0$

Αν $h(3) = 0$ τότε για $\xi = 3 \in [2, 3]$ έχουμε $h(\xi) = 0$

Αν $h(2) \neq 0$ και $h(3) \neq 0$ τότε προφανώς $h(2)h(3) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 3)$ (άρα $\xi \in [2, 3]$) τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [2, 3]$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi) = \xi + 2}$$

12.B2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 5} - 2x \right) & \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 3x + 5} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 3x + 5} + 2x)}{\sqrt{4x^2 - 3x + 5} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}^2 - 4x^2}{|x| \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2x} \stackrel{x > 0, |x| = x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 3x + 5 - \cancel{4x^2}}{x \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(-3 + \frac{5}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{-3 + 0}{\sqrt{4 - 0 + 0} + 2} = \boxed{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

12.B3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3x\eta\mu x + 6}{-3x^3 + 4x^2\sigma\upsilon\nu x - 2x - 9} & \stackrel{\text{διαφορούμε με } x^3 \neq 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{3x\eta\mu x}{x^3} + \frac{6}{x^3}}{-\frac{3x^3}{x^3} + \frac{4x^2\sigma\upsilon\nu x}{x^3} - \frac{2x}{x^3} - \frac{9}{x^3}} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3x\eta\mu x + 6}{-3x^3 + 4x^2\sigma\upsilon\nu x - 2x - 9} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - 3\frac{\eta\mu x}{x^2} + \frac{6}{x^3}}{-3 + 4\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^3}} \quad (1) \end{aligned}$$

Όμως

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\eta\mu x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \\ \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} = \boxed{0} \quad (2) \end{array}$$

και ομοίως

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{όταν } x \rightarrow -\infty, x < 0 \\ -\frac{1}{x} \geq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \geq \frac{1}{x} \end{array} \\ \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = \boxed{0} \quad (3) \end{array}$$

Οπότε

$$(1) \xRightarrow{(2),(3)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3x\eta\mu x + 6}{-3x^3 + 4x^2\sigma\upsilon\nu x - 2x - 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+0-3\cdot 0+0}{-3+4\cdot 0-0-0} = -\frac{2}{3}$$

12.B4

α) Για το πεδίο ορισμού της f : Πρέπει $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Άρα $A_f = [-1, +\infty)$

Το πεδίο ορισμού της g είναι όλο το $\mathbb{R}$

β) Είναι $A_f = [-1, +\infty)$ και $A_g = \mathbb{R}$. Οπότε

Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Όμως

$$x \in A_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}, \text{ που ισχύει πάντα}$$

και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow g(x) \in [-1, +\infty) \Rightarrow x^2 + x - 1 \geq -1 \Rightarrow x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 0$$

$$\text{Άρα } A_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$

και

$$\boxed{(f \circ g)(x)} = f(g(x)) = \sqrt{g(x)+1} = \sqrt{x^2+x-1+1} = \boxed{\sqrt{x^2+x}}$$

12.B5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3}{x^3-2x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3}{x(x^2-2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{1^2+3}{1} \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

12.B6

α) Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,3) \Rightarrow f(1)=3 \Rightarrow \beta \cdot 1 - \alpha = 3 \Rightarrow \beta - \alpha = 3 \quad (1)$

Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-3,-5) \Rightarrow f(-3)=-5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \beta \cdot (-3) - \alpha = -5 \Rightarrow -3\beta - \alpha = -5 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 3 \\ -3\beta - \alpha = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\beta - 3\alpha = 9 \\ -3\beta - \alpha = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} -4\alpha = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

$$\stackrel{\alpha=-1}{(1)} \Rightarrow \beta + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

β) Για $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ είναι $f(x) = 2x + 1$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y = x - 5$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x - 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = x - 5 \Rightarrow \boxed{x = -6}$$

$$\text{και } y = x - 5 \stackrel{x=-6}{\Rightarrow} \Rightarrow \boxed{y = -11}$$

Άρα η C_f και η ευθεία $y = x - 5$ τέμνονται στο σημείο $(-6, -11)$

12.B7

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = x^2 + 3x - 1 \stackrel{g(x)=x-2}{\Rightarrow} f(x-2) = x^2 + 3x - 1 \stackrel{\text{θέτουμε } y=x-2}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow f(y) = (y+2)^2 + 3(y+2) - 1 \Rightarrow f(y) = y^2 + 4y + 4 + 3y + 6 - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{f(y) = y^2 + 7y + 9} \end{aligned}$$

12.B8

Για κάθε $x \neq 2$ είναι

$$(x-2)f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} - 2 \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x - 2} \Rightarrow$$

(Από την παραπάνω σχέση δεν μπορούμε να βρούμε το $f(2)$ θέτοντας $x = 2$ διότι ισχύει για κάθε $x \neq 2$)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}^2 - 2^2}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2 - 4}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} \stackrel{x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2+3}{\sqrt{2^2 + 2 - 2} + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ είναι $\boxed{f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \boxed{\frac{5}{4}}$

12.B9

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$
- 9) $f(-2) = 1$
- 10) $f(0) = 3$
- 11) $f(2) = 6$
- 12) $f(5) = 0$

12.B10

Για κάθε $x > 4$ έχουμε

$$2 < f(x) < 8 \stackrel{x-4>0}{\Rightarrow} 2(x-4) < (x-4)f(x) < 8(x-4)$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^+} 2(x-4) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} 8(x-4) = 0 \\ 2(x-4) < (x-4)f(x) < 8(x-4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 4^+} (x-4)f(x) = 0} \quad (1)$$

Ομοίως για κάθε $x < 4$ έχουμε

$$2 < f(x) < 8 \stackrel{x-4<0}{\Rightarrow} 2(x-4) > (x-4)f(x) > 8(x-4)$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} 2(x-4) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} 8(x-4) = 0 \\ 2(x-4) > (x-4)f(x) > 8(x-4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 4^-} (x-4)f(x) = 0} \quad (2)$$

Επομένως (1), (2) $\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 4} (x-4)f(x) = 0}$

12.B11

Αν $h(x) = \ln x$ η h θα έχει πεδίο ορισμού το $A_h = (0, +\infty)$

Οπότε το πεδίο ορισμού της $f \circ h$ είναι

$$A_{f \circ h} = \{x \in A_h \text{ και } h(x) \in A_f\} = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } \ln x \in [0, 1]\} = \\ = \{x > 0 \text{ και } 0 \leq \ln x \leq 1\} = \{x > 0 \text{ και } \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e\} = \{x > 0 \text{ και } 1 \leq x \leq e\}$$

Οι ανισώσεις $\begin{cases} x > 0 \\ 1 \leq x \leq e \end{cases}$ συναληθεύουν όταν $1 \leq x \leq e$. Άρα το πεδίο ορισμού τη $g(x) = f(\ln x)$ είναι το $A_g = [1, e]$

12.B12

Θέτουμε $h(x) = \frac{3f(x) + 6}{x - 1}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -5$ (1) και ακόμη

$$h(x) = \frac{3f(x) + 6}{x - 1} \Rightarrow h(x)(x - 1) = 3f(x) + 6 \Rightarrow f(x) = \frac{h(x)(x - 1) - 6}{3}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)(x - 1) - 6}{3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} h(x) \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) - \lim_{x \rightarrow 1} 6}{3} \stackrel{(1)}{=} \frac{-5 \cdot 0 - 6}{3} = \boxed{-2}$$

12.B13

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{3}{x}\right)} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x} \left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{4 + 0 + 0}}{2 - 0} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

12.B14

Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (-6x + 2\alpha - \beta) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - \alpha x + \beta) &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -6 \cdot 1 + 2\alpha - \beta &= -2 \\ 1^2 - \alpha \cdot 1 + \beta &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2\alpha - \beta &= 4 \\ -\alpha + \beta &= -3 \end{aligned} \right\}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε $\boxed{\alpha = 1}$ και $\boxed{\beta = -2}$

12.B15

α) Πρέπει $1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

β) Έχουμε

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow \frac{2x_1}{1 - x_1} = \frac{2x_2}{1 - x_2} \Rightarrow 2x_1(1 - x_2) = 2x_2(1 - x_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x_1 - \cancel{2x_1x_2} = 2x_2 - \cancel{2x_1x_2} \Rightarrow \cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

$$\gamma) \quad f(x) = \frac{2x}{1-x} \quad \overset{\substack{\text{όπου } x \\ \text{θέτουμε } f^{-1}(x)}}{\Rightarrow} \quad f(f^{-1}(x)) = \frac{2f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)} \quad \overset{f(f^{-1}(x))=x}{\Rightarrow} \quad x = \frac{2f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x[1-f^{-1}(x)] = 2f^{-1}(x) \Rightarrow x - xf^{-1}(x) = 2f^{-1}(x) \Rightarrow x = 2f^{-1}(x) + xf^{-1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+x)f^{-1}(x) = x \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{x+2}}$$