

12.A2 1)**α) Ψ****β) Αντιπαράδειγμα**Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$ και $g(x) = x^2$, τότεΤότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Προφανώς $f \circ g \neq g \circ f$ **12.A2 2)****α) Ψ****β) Αντιπαράδειγμα**

$$\text{Έστω } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Η f είναι $1 - 1$ αλλά όχι γνησίως μονότονη**12.A2 3)****3) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση στο A δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα****α) Ψ****β) Αντιπαράδειγμα**Έστω $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ Η f είναι γνησίως αύξουσα διότι αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

όμως

επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1, 5]$ σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής έχει και ελάχιστη και μέγιστη τιμή**12.A2 4)****α) Α**

$$\text{β) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty \text{ διότι αν } x > 0 \Rightarrow x^{2v+1} > 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty \text{ διότι αν } x < 0 \Rightarrow x^{2v+1} < 0$$

12.A2 5)**α) Ψ****β) Αντιπαράδειγμα**Έστω $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in [-2, 2]$, τότε

$$f(-2)f(2) > 4 \cdot 4 = 16 > 0$$

και $f(0) = 0$ με $0 \in [-2, 2]$ **12.A2 6)****α) Ψ**

β) Αντιπαράδειγμα

Έστω $f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Τότε

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \right) = 1 \neq 0$$

12.A2 7)

α) Α

β) Έστω ότι η συνάρτηση h με $h(x) = f(x) + g(x)$ είναι συνεχής στο x_0 . Τότε θα είναι $g(x) = h(x) - f(x)$ και άρα η g θα είναι συνεχής στο x_0 (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων) άτοπο

Άρα η h δεν είναι συνεχής στο x_0

12.A2 8)

α) Ψ

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ενώ η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, άρα δεν είναι ίσες

12.A2 9)

α) Ψ

β) Αντιπαράδειγμα

Έστω $f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Τότε

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \right) = 1 \neq 0$$

12.A2 10)

α) Ψ

β) Αντιπαράδειγμα

Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 5 \\ 0, & x < 5 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 5 \\ 1, & x < 5 \end{cases}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τότε

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όμως

$$\text{δεν ισχύει } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ούτε ισχύει } g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

12.A2 11)

α) Α

β) Επειδή η f είναι περιττή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει

$$f(-x) = -f(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

α) Ψ

β) Αντιπαράδειγμα

$$\text{Έστω } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Τότε είναι $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η οποία προφανώς είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ενώ η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού είναι ασυνεχής στο $x_0 = 5$)

α) Α

β) Έστω ότι η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A και δεν είναι $1-1$. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$

$$\text{Έστω } f(x_1) = f(x_2) = \alpha$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, \alpha)$ και $B(x_2, \alpha)$

Αφού όμως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y = x$

θα διέρχεται και από τα συμμετρικά των σημείων A και B ως προς την ευθεία $y = x$,

δηλαδή θα διέρχεται και από τα σημεία $A_1(\alpha, x_1)$ και $B_1(\alpha, x_2)$

οπότε θα ισχύει $f(\alpha) = x_1$ και $f(\alpha) = x_2$, με $x_1 \neq x_2$ άτοπο (γιατί τότε η f δεν θα ήταν συνάρτηση)

Άρα η συνάρτηση f είναι $1-1$

α) Α

β) Επειδή η f είναι περιττή για κάθε $x \in A_f$ θα ισχύει $f(-x) = -f(x)$

Ακόμη επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 θα είναι $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A_f$

$$f(x) \leq f(x_0) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} f(-x) \leq f(x_0) \xrightarrow{f(-x) = -f(x)} -f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow$$

$$f(x) \geq -f(x_0) \xrightarrow{f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-x_0) = -f(x_0)} f(x) \geq f(-x_0), \text{ για κάθε } x \in A_f$$

άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $-x_0$

α) Ψ

β) Αντιπαράδειγμα

$$\text{Έστω } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Τότε } g(x) = xf(x) = \begin{cases} x \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 3x, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 3x, & x = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση g προφανώς δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ διότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$
και $g(0) = 3 \cdot 0 = 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$

12.A2 16)

α) Α

β) Καταρχήν είναι $f(x) \neq -4$ διότι αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με

$$f(\alpha) = -4 \Rightarrow -f(\alpha) = 4 \xrightarrow{f: \text{περιττή} \Rightarrow -f(\alpha) = f(-\alpha)} f(-\alpha) = 4 \text{ άτοπο}$$

Έστω τώρα ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) > 4$. Τότε

$$f(x_0) > 4 \Rightarrow -f(x_0) < -4 \xrightarrow{f: \text{περιττή} \Rightarrow -f(x_0) = f(-x_0)} f(-x_0) < -4$$

Επομένως

η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-x_0, x_0]$ (ή στο διάστημα $[x_0, -x_0]$ αν $x_0 < 0$)

$$f(x_0) < 4 < f(-x_0)$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\xi \in (-x_0, x_0)$
τέτοιο ώστε $f(\xi) = 4$ άτοπο

Ομοίως και αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) < -4$

Άρα τελικά θα είναι $-4 < f(x) < 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$