

**10.7 1)**

Θεωρούμε την συνάρτηση  $h: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = f(x) - (x+1) \Rightarrow$

$$h(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$$

Αρκεί, να αποδειχτεί ότι, η συνάρτηση  $h$  έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα  $(-2, 1)$

Η συνάρτηση  $h$

είναι συνεχής στο διάστημα  $[-2, 1]$ , ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} h(-2) &= (-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 - (-2) - 1 = 5 > 0 \\ h(1) &= 1^4 + 1^3 - 1^2 - 1 - 1 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(-2)h(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση  $h$ , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα  $(-2, 1)$  και άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , με  $f(x) = x^4 + x^3 - x^2$ , με την ευθεία  $y = x + 1$ , με τετμημένη στο διάστημα  $(-2, 1)$

**10.7 2)**

Θεωρούμε την συνάρτηση  $h: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow$

$$h(x) = x^3 - x - (x^2 + 3) \Rightarrow h(x) = x^3 - x^2 - x - 3$$

Αρκεί, να αποδειχτεί ότι, η συνάρτηση  $h$  έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα  $(2, 3)$

Η συνάρτηση  $h$

είναι συνεχής στο διάστημα  $[2, 3]$ , ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} h(2) &= 2^3 - 2^2 - 2 - 3 = -1 < 0 \\ h(3) &= 3^3 - 3^2 - 3 - 3 = 15 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(2)h(3) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση  $h$ , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα  $(2, 3)$  και άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^3 - x$  και  $g(x) = x^2 + 3$ , τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο, με τετμημένη στο διάστημα  $(2, 3)$

**10.7 3)**

Θεωρούμε την συνάρτηση  $h: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = f(x) - x \Rightarrow$

$$h(x) = \sin x - x$$

Αρκεί, να αποδειχτεί ότι, η συνάρτηση  $h$  έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

Η συνάρτηση  $h$

είναι συνεχής στο διάστημα  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} \stackrel{\sqrt{3} \approx 1,7}{>} 0 \\ h\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \pi}{6} \stackrel{\sqrt{2} \approx 1,4}{<} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{6}\right)h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση  $h$ , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$  και άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , με  $f(x) = \sin x$ , με την ευθεία  $y = x$ , με τετμημένη

στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$