

Θεωρούμε την συνάρτηση  $f : [0, \alpha + \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x - \alpha \eta \mu x - \beta$

Η συνάρτηση  $f$

είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, \alpha + \beta]$ , ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 - \alpha \eta \mu 0 - \beta = -\beta < 0 \\ f(\alpha + \beta) &= \alpha + \beta' - \alpha \eta \mu(\alpha + \beta) - \beta' = \alpha[1 - \eta \mu(\alpha + \beta)] \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(\alpha + \beta) \leq 0$$

Αν  $f(\alpha + \beta) = 0$  τότε η  $f$  έχει ρίζα την  $\rho = \alpha + \beta$  η οποία προφανώς είναι θετική

Αν  $f(\alpha + \beta) \neq 0$  τότε προφανώς  $f(0)f(\alpha + \beta) < 0$ , οπότε από το θεώρημα Bolzano η  $f$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα  $(0, \alpha + \beta)$  η οποία πάλι προφανώς είναι θετική

Επομένως σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση  $f$ , άρα και η εξίσωση  $x = \alpha \eta \mu x + \beta$ , έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα