

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = x - \eta\mu x - \alpha$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \alpha + 1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= 0 - \eta\mu 0 - \alpha = -\alpha < 0 \\ h(\alpha + 1) &= \cancel{\alpha} + 1 - \eta\mu(\alpha + 1) - \cancel{\alpha} = 1 - \eta\mu(\alpha + 1) \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{h(0)h(\alpha + 1) \leq 0}$$

Αν $h(\alpha + 1) = 0$ τότε για $x_0 = \alpha + 1 \in (0, \alpha + 1]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(\alpha + 1) \neq 0$ τότε προφανώς $h(0)h(\alpha + 1) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \alpha + 1)$ (άρα $x_0 \in (0, \alpha + 1]$) τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \alpha + 1]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. Δηλαδή η συνάρτηση h άρα και η εξίσωση $x = \eta\mu x + \alpha$, έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(0, \alpha + 1)$ η οποία προφανώς είναι θετική και δεν υπερβαίνει τον αριθμό $\alpha + 1$