

1.26 1)

Έστω x η μία κάθετη πλευρά, y η άλλη κάθετη πλευρά και u η υποτείνουσα του τριγώνου. Τότε θα ισχύει

$$x+y+u=10 \Rightarrow y=10-x-u \quad (1)$$

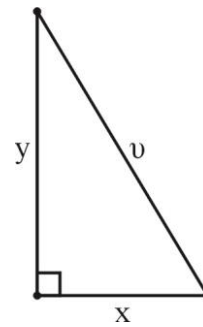
και από Πυθαγόρειο θεώρημα

$$x^2 + y^2 = u^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x^2 + (10-x-u)^2 = u^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 100 + x^2 + \cancel{u^2} - 20x - 20u + 2xu = \cancel{u^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 100 - 20x = 20u - 2xu \Rightarrow 2x^2 + 100 - 20x = (20 - 2x)u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 + 100 - 20x}{20 - 2x} = u \Rightarrow \boxed{u = f(x) = \frac{x^2 - 10x + 50}{10 - x}}, \quad x \in (0, 10)$$



1.26 2)

Το σημείο B έχει τετμημένη x και ανήκει στην ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $(0, 4)$ και $(4, 0)$ και άρα έχει εξίσωση

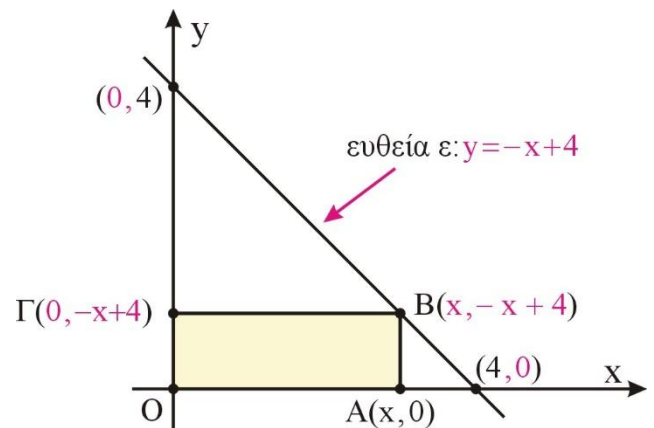
$$\varepsilon: y = -x + 4$$

Επειδή οι συντεταγμένες του B πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση της ε το B θα έχει συντεταγμένες $B(x, -x + 4)$

Έτσι το παραλληλόγραμμο $OAB\Gamma$ έχει **βάση μήκους x και ύψος $-x + 4$** και μάλιστα $0 < x < 4$

Οπότε το παραλληλόγραμμο $OAB\Gamma$ έχει εμβαδό $E = \beta \cdot u \Rightarrow E(x) = x \cdot (4 - x) \Rightarrow$

$$E(x) = 4x - x^2, \quad 0 < x < 4$$



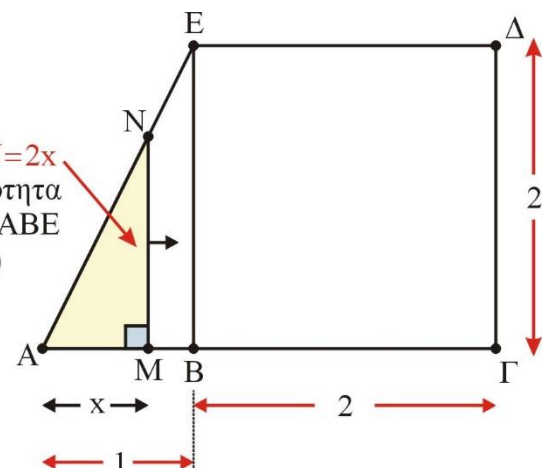
1.26 3)

Όταν το x είναι μικρότερο ή ίσο με 1 τότε το χρωματισμένο χωρίο είναι ένα τρίγωνο με βάση x και ύψος όσο το MN

Από την προφανή ομοιότητα των τριγώνων ABE και AMN έχουμε

$$\frac{x}{1} = \frac{MN}{2} \Rightarrow MN = 2x$$

$MN = 2x$
(από την ομοιότητα των τριγώνων ABE και AMN)



Άρα αν $0 < x \leq 1$ είναι

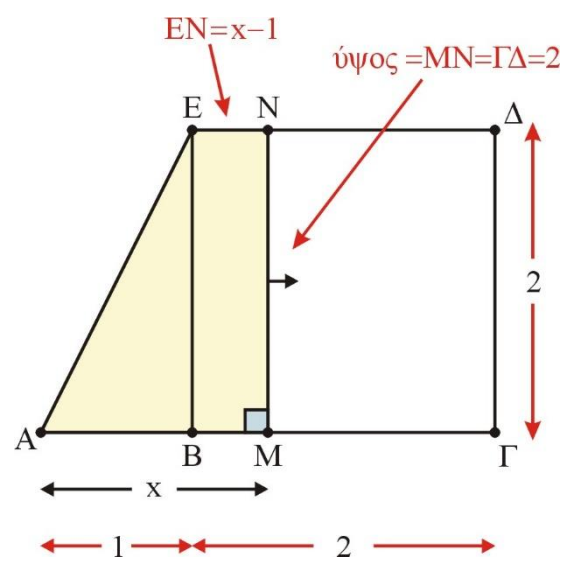
$$E = \frac{\beta \cdot v}{2} \Rightarrow E(x) = \frac{x \cdot 2x}{2} \Rightarrow E(x) = x^2$$

Όταν το x είναι μεγαλύτερο από 1 (και προφανώς μικρότερο από 3) τότε το χρωματισμένο χωρίο είναι ένα τραπέζιο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Άρα αν $1 < x \leq 3$ είναι

$$E = \frac{(B+\beta) \cdot v}{2} \Rightarrow E(x) = \frac{(AM+EN) \cdot MN}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{(x+x-1) \cdot 2}{2} \Rightarrow E(x) = 2x-1$$



Τελικά το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

$$E(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x-1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

1.26 4)

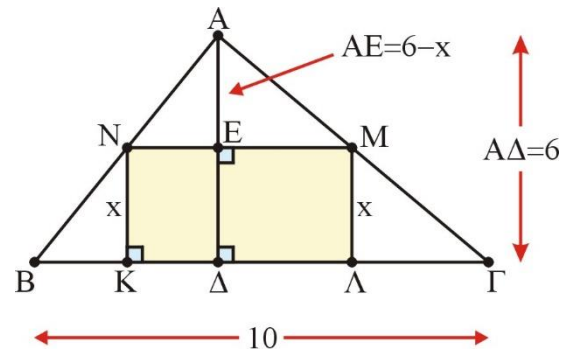
Αρκεί να υπολογίσουμε το MN συναρτήσει του x

Από την προφανή ομοιότητα των τριγώνων ABΓ και AMN έχουμε

$$\frac{B\Gamma}{MN} = \frac{A\Delta}{AE} \Rightarrow \frac{10}{MN} = \frac{5}{5-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5MN = 10(5-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN = \frac{2}{1} (5-x) \Rightarrow MN = 10-2x$$



Οπότε το παραλληλόγραμμο KLMN έχει

α) εμβαδό $E = \beta \cdot v \Rightarrow E(x) = (10-2x) \cdot x \Rightarrow E(x) = -2x^2 + 10x, 0 < x < 5$

β) περίμετρο $p = 2K\Lambda + 2KN \Rightarrow p(x) = 2(10-2x) + 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow p(x) = 20 - 4x + 2x \Rightarrow p(x) = 20 - 2x, 0 < x < 5$$