Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.105 (2004 – 2ο)

α) Η f λόγω του $\ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη σε αυτό ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=2x\ln x+x^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{x}}\Rightarrow f'(x)=2x\ln x+x\Rightarrow f'(x)=x(2\ln x+1)$$

Είναι $f'(x)=0\Rightarrow x(2\ln x+1)=0\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}2\ln x+1=0\Rightarrow \ln x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$

Άρα η f' μηδενίζεται στο $x_o=e^{-\frac{1}{2}}$ με

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}e^{-1}=-\frac{1}{2e}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f, φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$			$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$ τε	$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ και

γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$

και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_o=e^{-\frac{1}{2}}$, ίσο με $-\frac{1}{2}$

β) Η f', έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=(x)'(2\ln x+1)+x(2\ln x+1)'=2\ln x+1+\cancel{x}\frac{2}{\cancel{x}}=2\ln x+3$$

Είναι $f''(x)=0\Rightarrow 2\ln x+3=0\Rightarrow \ln x=-\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$

Τα πρόσημα της f'', η κυρτότητα και οι θέσεις των σημείων καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0		$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$			$\frown$	σκ	$\smile$

Οπότε η f είναι

<u>κοίλη</u> στο $\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$ και <u>κυρτή</u> στο $\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\left(e^{-\frac{3}{2}},f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2\ln e^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}e^{-3}\right)$

δηλαδή στο $\left(e^{-\frac{3}{2}},-\frac{3}{2}e^{-3}\right)$

γ) Είναι

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\cancel{4}^2}}{-2\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{2}x^2=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\ln x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

Τα πρόσημα της f', η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$		0	$\searrow$	$\boxed{-\frac{1}{2e}}$ τε	$\nearrow$	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = \left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_1) = \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right)$

στο διάστημα $A_2 = \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ είναι

$f \nearrow \Rightarrow f(A_2) = \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right)$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$