

- α) Τα έσοδα της εταιρείας από την πώληση x προϊόντων είναι προφανώς

$$xP = \frac{x+50P=5000 \Rightarrow P=\frac{5000-x}{50}}{x} = \frac{5000-x}{50} \Rightarrow \frac{5000x-x^2}{50}$$

Οπότε το κέρδος (κέρδος = έσοδα - κόστος παραγωγής) της εταιρείας από την πώληση x προϊόντων είναι

$$f(x) = xP - K(x) \Rightarrow K(x) = \frac{5000x-x^2}{50} - (25x+2000) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5000x-x^2-1250x-100000}{50} \Rightarrow f(x) = \frac{-x^2+3750x-100000}{50}, \quad x \geq 0$$

Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{-2x+3750}{50} = \frac{-2(x-1875)}{50}, \quad x \geq 0$$

Έτσι η K' μηδενίζεται στο $x_0 = 1875$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	1875	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	$-$
$f(x)$			$\square$	

ολικό μέγιστο

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1875$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως η εταιρεία πρέπει να παράγει 1875 προϊόντα ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος

- β) Τα έσοδα της εταιρείας από την πώληση x προϊόντων είναι προφανώς

$$xP = \frac{x+50P=5000 \Rightarrow P=\frac{5000-x}{50}}{x} = \frac{5000-x}{50} \Rightarrow \frac{5000x-x^2}{50}$$

Οπότε το κέρδος (κέρδος = έσοδα - κόστος παραγωγής - φόρος) της εταιρείας από την πώληση x προϊόντων είναι

$$g(x) = xP - K(x) - 10x \Rightarrow K(x) = \frac{5000x-x^2}{50} - (25x+2000) - 10x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{5000x-x^2-1250x-100000-500x}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{-x^2+3250x-100000}{50}, \quad x \geq 0$$

Η g ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = \frac{-2x + 3250}{50} = \frac{-2(x - 1625)}{50}, \quad x \geq 0$$

Έτσι η g' μηδενίζεται στο $x_0 = 1625$

Τα πρόσημα της g' , η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	1625	$+\infty$
$g'(x)$			0	
$g(x)$				

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1625$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως η εταιρεία πρέπει να παράγει 1625 προϊόντα ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος

γ) Έστω ότι η κυβέρνηση βάζει φόρο $a \in \mathbb{R}$ σε κάθε τεμάχιο. Τότε

τα έσοδα της εταιρείας από την πώληση x προϊόντων είναι προφανώς

$$xP = \frac{x + 50P = 5000 \Rightarrow P = \frac{5000 - x}{50}}{x} = \frac{5000 - x}{50} = \frac{5000x - x^2}{50}$$

Οπότε το κέρδος (κέρδος = έσοδα - κόστος παραγωγής - φόρος) της εταιρείας από την πώληση x προϊόντων είναι

$$h(x) = xP - K(x) - ax \Rightarrow K(x) = \frac{5000x - x^2}{50} - (25x + 2000) - ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{5000x - x^2 - 1250x - 100000 - 50ax}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{-x^2 + (3250 - 50a)x - 100000}{50}, \quad x \geq 0$$

Η h ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = \frac{-2x + 3750 - 50a}{50} = \frac{-2(x - 1875 + 25a)}{50}, \quad x \geq 0$$

Έτσι η h' μηδενίζεται στο $x_0 = 1875 - 25a$

Τα πρόσημα της h' , η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$1875-25\alpha$	$+\infty$	
$g'(x)$			+	0	-
$g(x)$			 ολικό μέγιστο		

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1875 - 25\alpha$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως η εταιρεία πρέπει να παράγει $1875 - 25\alpha$ προϊόντα προκειμένου να έχει το μέγιστο κέρδος

Τότε η κυβέρνηση θα εισπράξει φόρο

$$\Phi(\alpha) = (1875 - 25\alpha)\alpha \Rightarrow \Phi(\alpha) = 1875\alpha - 25\alpha^2, \alpha \geq 0$$

Η Φ ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\Phi'(\alpha) = 1875 - 50\alpha = 50(37,5 - \alpha), \alpha \geq 0$$

Έτσι η Φ' μηδενίζεται στο $\alpha_0 = 37,5$

Τα πρόσημα της Φ' , η μονοτονία και τα ακρότατα της Φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

α	$-\infty$	0	$37,5$	$+\infty$	
$\Phi'(\alpha)$			$+$	0	$-$
$\Phi(\alpha)$					
			} ολικό μέγιστο {		

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η Φ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\alpha_0 = 37,5$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως η κυβέρνηση πρέπει να βάλει φόρο $\boxed{37,5}$ € σε κάθε τεμάχιο προκειμένου να έχει την μέγιστη είσπραξη φόρων