

33.Γ1

Μια αρχική της $\frac{1}{\sqrt{x}}$ είναι η $2\sqrt{x}$

Οπότε

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^4 (2\sqrt{x})' \ln x dx = \left[2\sqrt{x} \ln x \right]_1^4 - \int_1^4 2\sqrt{x} (\ln x)' dx = \\ &= 2\sqrt{4} \ln 4 - \int_1^4 2\sqrt{x} \frac{1}{x} dx = 4 \ln 4 - 2 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4 \ln 4 - 2 \left[2\sqrt{x} \right]_1^4 = \\ &= 4 \ln 4 - 2(2\sqrt{4} - 2) = 4 \ln 4 - 4\end{aligned}$$

33.Γ2

Προφανώς είναι $f(0) = 5$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[-1, 1]$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα

Ακόμη επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, θα είναι $f'(0) = 0$

Οπότε

$$\text{για κάθε } x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$\text{για κάθε } x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Άρα το εμβαδό του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = -1$ και $x = 1$ θα είναι

$$\begin{aligned}E &= \int_{-1}^1 |f'(x)| dx = \int_{-1}^0 |f'(x)| dx + \int_0^1 |f'(x)| dx \stackrel{\substack{x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0}}{=} \int_{-1}^0 -f'(x) dx + \int_0^1 f'(x) dx = \\ &= \int_{-1}^0 -f'(x) dx + \int_0^1 f'(x) dx = -[f(x)]_{-1}^0 + [f(x)]_0^1 = \\ &= -[f(0) - f(-1)] + [f(1) - f(0)] = -f(0) + f(-1) + f(1) - f(0) = \\ &\stackrel{\substack{f(0)=5 \\ f(1)=17-f(-1)}}{=} -5 + f(-1) + 17 - f(-1) - 5 = 7\end{aligned}$$

33.Γ3

Αρχικά θα βρούμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$

Για αυτό θα βρούμε που τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

$$\text{Έχουμε } f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

$$\text{Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^2 |2x - x^2| dx$$

τα πρόσημα του $2x - x^2 = x(2 - x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$2x-x^2$		$-$	$+$	$-$

Επομένως

$$E = \int_0^2 |2x - x^2| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

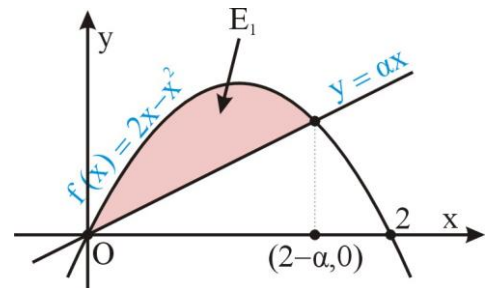
Η ζητούμενη ευθεία επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα έχει εξίσωση $y = ax$. Θα βρούμε τώρα που τέμνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία $y = ax$

Είναι

$$f(x) = ax \Leftrightarrow ax = 2x - x^2 \Leftrightarrow 2x - x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(2 - x - a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } 2 - x - a = 0 \Rightarrow x = 2 - a$$

Θα πρέπει τώρα το εμβαδό E_1 του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = ax$ να είναι το μισό του προηγούμενου εμβαδού E . Δηλαδή θα πρέπει



$$E_1 = \frac{4}{2} \Rightarrow \int_0^{2-a} |f(x) - ax| dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \int_0^{2-a} |2x - x^2 - ax| dx = \frac{2}{3} \quad \text{όταν } 0 \leq x \leq a+2 \Rightarrow 2x - x^2 - ax$$

$$\int_0^{2-a} [(2-a)x - x^2] dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \left[\frac{(2-a)x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{2-a} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2-a)(2-a)^2}{2} - \frac{(2-a)^3}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cancel{3} \frac{(2-a)^3}{\cancel{2}} - \cancel{2} \frac{(2-a)^3}{\cancel{3}} = \cancel{2} \frac{2}{\cancel{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(2-a)^3 - 2(2-a)^3 = 4 \Rightarrow (2-a)^3 = 4 \Rightarrow 2-a = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2 - \sqrt[3]{4}}$$

33.Γ4

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού είναι

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{όπου } \int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow F(b) - F(a) = 0 \Rightarrow F(b) = 0$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = e^{-x} F(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = (e^{-x})' F(x) + e^{-x} F'(x) = -e^{-x} F(x) + e^{-x} f(x) = e^{-x} [f(x) - F(x)]$$

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= e^{-\alpha} F(\alpha) \stackrel{F(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) &= e^{-\beta} F(\beta) \stackrel{F(\beta)=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{-x_0} [f(x_0) - F(x_0)] = 0 \stackrel{e^{-x_0} \neq 0}{\Rightarrow} f(x_0) - F(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = F(x_0)$$

33.Γ5

$$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (x)' F(x) dx = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 xF'(x) dx \stackrel{F'(x)=f(x)=e^{x^2}}{=} 1 \cdot F(1) - 0 - \int_0^1 x e^{x^2} dx \stackrel{F(1)=\frac{1}{2}}{=}$$

$$1 \cdot F(1) - 0 - \int_0^1 x e^{x^2} dx \stackrel{F(1)=\frac{1}{2}}{=} -\frac{1}{2} - \int_0^1 x e^{x^2} dx \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=x^2 \Rightarrow dy=2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dy \\ \text{για } x=0 \Rightarrow y=0 \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=1}}{=} -\frac{1}{2} - \int_0^1 e^y \frac{1}{2} dy =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} [e^y]_0^1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e - 1) = -\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{e}{2}$$

33.Γ6

$$\text{Η σχέση } \int_{\alpha+1}^{2\alpha} f(x) dx = 3\alpha^2 + 2\alpha - 5$$

για $\alpha = -1$ γίνεται

$$\int_0^{-2} f(x) dx = 3(-1)^2 + 2(-1) - 5 \Rightarrow \int_0^{-2} f(x) dx = -4 \Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx = 4 \quad (1)$$

για $\alpha = 0$ γίνεται

$$\int_1^0 f(x) dx = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 \Rightarrow \int_1^0 f(x) dx = -5 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 5 \quad (2)$$

Επομένως

$$\int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \stackrel{(1),(2)}{=} 4 + 5 = 9$$

33.Γ7

$$\text{Θεωρούμε την συνάρτηση } f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 3}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-3, 3]$ με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x^2+3) - (x^2+x+4)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 6x + x^2 + 3 - \cancel{2x^3} - 2x^2 - 8x}{(x^2+3)^2} = \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2} \stackrel{\Delta=4+12=16 \quad x_{1,2}=\frac{2 \pm 4}{-2} \begin{matrix} \nearrow x_1=-3 \\ \searrow x_1=1 \end{matrix}}{=} \frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}, \end{aligned}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3$ ή $x = 1$

$$\text{και } f(-3) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, \quad f(1) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad f(3) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$					
				$\frac{3}{2}$ τμ	
		$\frac{5}{6}$ τε			$\frac{4}{3}$ τε

Από τον πίνακα αυτό βλέπουμε ότι η f έχει

ολικό ελάχιστο το $\frac{5}{6}$ (είναι $\frac{5}{6} < \frac{4}{3}$) και

ολικό μέγιστο το $\frac{3}{2}$

Έτσι έχουμε $\frac{5}{6} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$ για κάθε $x \in [-3, 3]$ (χωρίς να είναι σταθερή) άρα

$$\frac{5}{6} \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \int_{-3}^3 \frac{5}{6} dx < \int_{-1}^1 f(x) dx < \int_{-3}^3 \frac{3}{2} dx \Rightarrow$$

$$\frac{5}{6} [3 - (-3)] < \int_{-3}^3 \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 3} dx < \frac{3}{2} [3 - (-3)] \Rightarrow 5 < \int_{-3}^3 \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 3} dx < 9$$

33.Γ8

Επειδή έχουμε τρεις γραμμές θα χρειαστούμε σχήμα

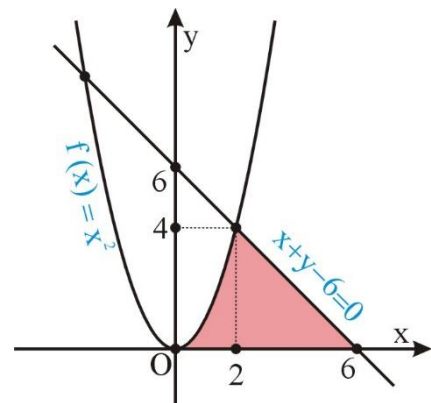
Για να βρούμε που τέμνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ και η ευθεία

$$x + y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 6$$

λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 6 \end{cases}$ και βρίσκουμε ότι

τέμνονται στα σημεία $(2, 4)$ και $(-3, 9)$

Η ευθεία $x + y - 6 = 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(2, 0)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(0, 0)$



Έτσι με βάση το σχήμα το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 (-x + 6) dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^6 (-x + 6) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[-\frac{x^2}{2} + 6x \right]_2^6 = \\ &= \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \left(-\frac{6^2}{2} + 6 \cdot 6 \right) - \left(-\frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2 \right) = 9 - 18 + 36 - (-2 + 12) = 9 + 18 - 10 = 17 \end{aligned}$$