

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (σελ. 133)

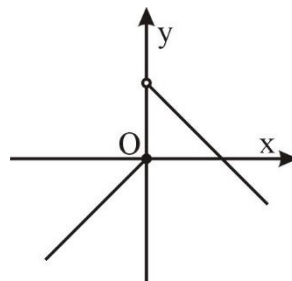
Α2. Θεωρία (σελ. 104)

Α3. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις

α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Α4. Θεωρούμε την συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$ .Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  με  $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ Η μονοτονία της  $f$  και μια πρόχειρη γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω

| x       | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$ | +         |   | -         |
| $f(x)$  | ↗ ↘       |   |           |

η  $f$  είναι ορισμένη στο  $x_0 = 0$  και αλλάζει μονοτονία στο  $x_0 = 0$  αλλά δεν έχει ακρότατο στο  $x_0 = 0$ 

## ΘΕΜΑ Β

α) Είναι

$$f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) \Rightarrow f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 1 + 2x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x(x^2 - x - 2)$$

Έχουμε

$$f(0) = e^0(0^2 - 3 \cdot 0 + 1) \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(0) = e^0(0^2 - 0 - 2) \Rightarrow f'(0) = -2$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -2x \Rightarrow y = -2x + 1$$

β) Είναι

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{matrix}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \text{ ή } x = 2$$

$$\mu\epsilon \quad f(-1) = e^{-1}((-1)^2 - 3(-1) + 1) = 5e^{-1} \quad \text{και} \quad f(2) = e^2(2^2 - 3 \cdot 2 + 1) = -e^2$$

Τα πρόσημα της  $f'$  η μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$  φαίνονται στον διπλανό πίνακα

|         |                                                                                    |    |   |           |   |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|----|---|-----------|---|
| x       | $-\infty$                                                                          | -1 | 2 | $+\infty$ |   |
| $f'(x)$ | +                                                                                  | 0  | - | 0         | + |
| f(x)    |  |    |   |           |   |

Άρα η  $f$

είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -1]$

είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 2]$

είναι γνησίως αύξουσα στο  $[2, +\infty)$

έχει

τοπικό ελάχιστο στο  $x_1 = -1$  ίσο με  $f(-1) = 5e^{-1}$

τοπικό μέγιστο στο  $x_2 = 2$  ίσο με  $f(2) = -e^2$

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{-e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

Οπότε

στο διάστημα  $A_1 = (-\infty, -1]$  η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (0, 5e^{-1}]$$

στο διάστημα  $A_2 = [-1, 2]$  η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = [f(2), f(1)] = [-e^2, 5e^{-1}]$$

στο διάστημα  $A_3 = [2, +\infty)$  η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_3) = \left[ f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-e^2, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-e^2, +\infty)$$

δ) στο διάστημα  $A_1 = (-\infty, -1]$  η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (0, 5e^{-1}] , \text{ οπότε } -4 \notin f(A_1)$$

Άρα η εξίσωση  $f(x) = -4$  δεν έχει ρίζα στο διάστημα  $A_1 = (-\infty, -1]$

στο διάστημα  $A_2 = [-1, 2]$  η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_2) = [f(2), f(1)] = [-e^2, 5e^{-1}] , \text{ οπότε } -4 \in f(A_2)$$

Άρα η εξίσωση  $f(x) = -4$  έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα  $A_2 = [-1, 2]$

Ακόμη είναι  $f(0) = e^0(0^2 - 3 \cdot 0 + 1) \Rightarrow f(0) = 1$

Επομένως αν  $x_1$  είναι η ρίζα της

παραπάνω εξίσωσης  $f(x) = -4$  θα έχουμε

$$f(x_1) = -4 \Rightarrow f(x_1) < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(0) \Rightarrow x_1 < 0$$

άρα η ρίζα  $x_1$  είναι θετική

| x       | $-\infty$ | -1        | 0 | $x_1$ | 2      | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|---|-------|--------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0         | - | -     | 0      | +         |
| $f(x)$  |           | $5e^{-1}$ | 1 | -4    | $-e^2$ |           |

στο διάστημα  $A_3 = [2, +\infty)$  η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_3) = [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-e^2, +\infty), \text{ οπότε } -4 \in f(A_2)$$

Άρα η εξίσωση  $f(x) = -4$  έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα  $A_3 = [2, +\infty)$  η οποία προφανώς είναι θετική

Τελικά η εξίσωση  $f(x) = -4$  έχει δύο ακριβώς ρίζες οι οποίες είναι και οι δύο θετικές

### ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ισοδύναμα

$$x^{\sqrt{x}} < e^{x-1} \Leftrightarrow \ln x^{\sqrt{x}} < \ln e^{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x < (x-1) \ln e \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x < x-1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}} < 0$$

$$\text{Οπότε θέτουμε } h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x) = \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, +\infty)$  με

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x} - (x-1) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x} - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1 - \sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x}^2 + x - 1}{2\sqrt{x}x} = \frac{2\sqrt{x} - 2x + x - 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}} = \\ &= -\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Είναι προφανώς  $h'(x) < 0$ , για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ , επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ . Οπότε

για κάθε  $x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1) \Rightarrow \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}} < \ln 1 - \frac{1-1}{\sqrt{1}} \Rightarrow \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}} < 0$  που είναι ισοδύναμη με την σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε

### ΘΕΜΑ Δ

$$\alpha) f'(x) = e^{2x} f(-x) \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = 2e^{2x} f(-x) - e^{2x} f'(-x) \quad (1)$$

$$\text{Όμως } f'(x) = e^{2x} f(-x) \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} f'(-x) = e^{-2x} f(x) \quad (2)$$

Έτσι

$$\begin{aligned} (1) &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f''(x) = 2e^{2x}f(-x) - e^{2x} \left[ e^{-2x}f(x) \right] \Rightarrow f''(x) = 2e^{2x}f(-x) - \cancel{e^{2x}} \cancel{e^{-2x}} f(x) \Rightarrow \\ &\stackrel{e^{2x}f(-x)=f'(x)}{\Rightarrow} f''(x) = 2f'(x) - f(x) \end{aligned}$$

β) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2f'(x) - f(x) \Rightarrow f''(x) - f'(x) = f'(x) - f(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [f'(x) - f(x)]' = f'(x) - f(x) \Rightarrow f'(x) - f(x) = ce^x \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Ακόμη } f'(x) = e^{2x}f(-x) \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f'(0) = e^{2 \cdot 0}f(0) \stackrel{f(0)=2}{\Rightarrow} f'(0) = 2$$

$$\text{Έτσι } (3) \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f'(0) - f(0) = ce^0 \stackrel{f'(0)=f(0)=2}{\Rightarrow} c = 0$$

$$\text{Οπότε } (3) \stackrel{c=0}{\Rightarrow} f'(x) - f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Οπότε } f(x) = c_1 e^x \quad (4)$$

$$(4) \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f(0) = c_1 e^0 \stackrel{f(0)=2}{\Rightarrow} c_1 = 2$$

$$\text{Επομένως τελικά } (4) \stackrel{c=2}{\Rightarrow} f(x) = 2e^x$$