

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (σελ. 133)

Α2. Θεωρία (σελ. 128)

Α3. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

Α4. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$ αλλά παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ και μέγιστο στο $x_0 = 3$

ΘΕΜΑ Β

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{x^2 + 1} = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ με } f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ ίσο με $f(-1) = -\frac{1}{2}$ τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 1$ ίσο με $f(1) = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)					

β) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \boxed{0}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ Η f στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \boxed{0}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0}$$

άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

Η f στο $-\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη (αφού έχει οριζόντια)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(\sin x)$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με } f'(x) = \frac{1}{\sin x} (-\eta \mu x) \Rightarrow f'(x) = -\epsilon \varphi x$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow -\epsilon \varphi \xi = \frac{\ln(\sin \beta) - \ln(\sin \alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\epsilon \varphi \alpha < \frac{\ln(\sin \alpha) - \ln(\sin \beta)}{\beta - \alpha} < \epsilon \varphi \beta} \stackrel{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{με } -1}}{\Leftrightarrow} -\epsilon \varphi \alpha > \frac{\ln(\sin \beta) - \ln(\sin \alpha)}{\beta - \alpha} > -\epsilon \varphi \beta \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$-\epsilon \varphi \alpha > -\epsilon \varphi \xi > -\epsilon \varphi \beta \Leftrightarrow \epsilon \varphi \alpha < \epsilon \varphi \xi < \epsilon \varphi \beta \stackrel{\substack{\epsilon \varphi x \nearrow \\ \text{στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right)}}{\Leftrightarrow} \alpha < \xi < \beta \text{ που ισχύει διότι } \xi \in (\alpha, \beta)$$

ΘΕΜΑ Δ

α) Επειδή το A ανήκει στην καμπύλη $y = \frac{1}{x}$ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

της. Έστω λοιπόν ότι το A έχει συντεταγμένες $A\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$, με $\alpha > 0$. Το B θα έχει

την ίδια τεταγμένη με το A και επειδή ανήκει στην ευθεία $y = -x$ θα έχει

$$\text{συντεταγμένες } \boxed{B\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)}$$

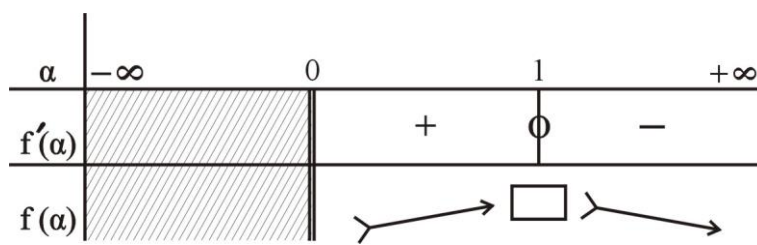
Έτσι το μήκος του AB (με χρήση του τύπου $(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$) θα είναι

$$(AB) = \sqrt{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)^2} = \left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| \stackrel{\alpha > 0}{=} \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Θα βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης } \boxed{(AB) = f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}}, \alpha > 0$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } f'(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{\alpha^2}$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα



Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\alpha_0 = 0$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως το μήκος του AB γίνεται ελάχιστο όταν το A έχει συντεταγμένες $A(1,1)$

β) Το σημείο Δ θα έχει την ίδια τετμημένη με το A , άρα αφού είναι $A\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$, θα είναι $\Delta(\alpha, 0)$. Επομένως το εμβαδό του $AB\Gamma\Delta$ θα είναι

$$E_{AB\Gamma\Delta} = (\text{βασή}) \times (\text{ύψος}) \Rightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = (AB) \times (A\Delta) \Rightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = \alpha^2 + 1$$

Άρα το εμβαδό του $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από την συνάρτηση

$$\boxed{E_{AB\Gamma\Delta} = E(\alpha) = \alpha^2 + 1}, \quad \alpha > 0$$

και επομένως ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$ είναι

$$E'(\alpha) = 2\alpha$$

που όταν το AB γίνεται ελάχιστο θα είναι $\alpha = 1$ και άρα ο ρυθμός μεταβολής θα είναι $\boxed{E'(1) = 2}$