

28.A2 1)

- α) Α
- β) Εφόσον η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[α,β]$ σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής θα έχει ολικό μέγιστο. Αυτό προφανώς θα είναι και τοπικό μέγιστο και μάλιστα το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα

28.A2 2)

- α) Ψ
- β) Εφόσον έχει ακρότατο στο x_0 σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_0) = 0$.
Έστω τώρα ότι στο x_0 η f παρουσιάζει και σημείο καμπής. Αυτό σημαίνει ότι η f' αλλάζει μονοτονία στο x_0 . Άρα
- είτε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(γ, x_0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(x_0, δ)$
 - είτε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(γ, x_0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(x_0, δ)$

Έστω λοιπόν ότι συμβαίνει το πρώτο. Έστω δηλαδή ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(γ, x_0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(x_0, δ)$

Τότε

$$\text{για κάθε } x \in (γ, x_0) \Rightarrow x < x_0 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(x_0) \xRightarrow{f'(x_0)=0} f'(x) < 0$$

$$\text{για κάθε } x \in (x_0, δ) \Rightarrow x > x_0 \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) < f'(x_0) \xRightarrow{f'(x_0)=0} f'(x) < 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$			

Αυτό σημαίνει όμως ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 . Άτοπο

Ομοίως θα καταλήξουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ισχύει το δεύτερο άρα η f δεν μπορεί να έχει και σημείο καμπής στο $A(x_0, f(x_0))$

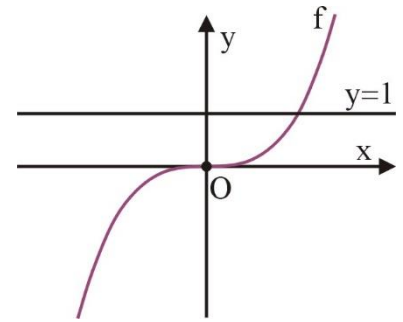
28.A2 3)

- α) Α
- β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Ακόμη $f(0) = 0$ και άρα το σημείο $(0, f(0))$ ανήκει και στην κατακόρυφη ασύμπτωτη $x = 0$ και στην γραφική παράσταση της f

- α) Ψ
 β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$. Η ευθεία $y=1$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f αλλά δεν εφάπτεται σε αυτήν



28.A2 5)

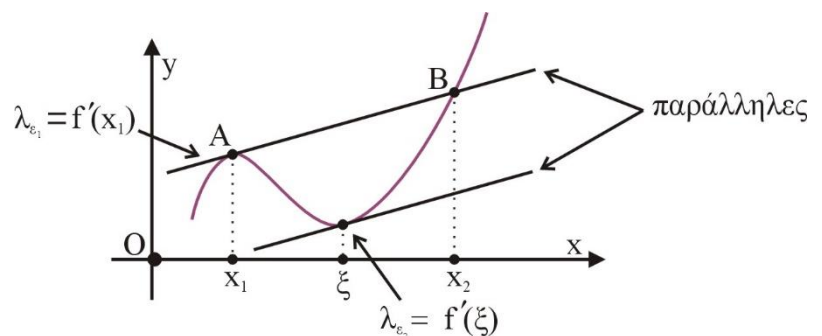
- α) Ψ
 β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$
 Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ διότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2) = -2$ και $f(0) = 0$.
 . Οπότε δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0,1]$. Εντούτοις είναι $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1-0}{1-0} = 1$ και $f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$
 άρα προφανώς υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$

28.A2 6)

- α) Ψ
 β) Απλώς οι εφαπτόμενες τους θα είναι παράλληλες. π.χ. έστω $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^2 + 1$ με $f'(x) = g'(x) = 2x$.
 Προφανώς είναι $f'(0) = g'(0) = 0$
 Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$ είναι η $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = 0(x-0) \Rightarrow y = 0$
 Η εφαπτομένη της C_g στο $(0,1)$ είναι η $y - g(0) = g'(0)(x-0) \Rightarrow y - 1 = 0(x-0) \Rightarrow y = 1$.
 Άρα παρόλο που είναι $f'(0) = g'(0) = 0$ οι C_f και C_g δεν έχουν κοινή εφαπτόμενη στο $x_0 = 0$

28.A2 7)

- α) Ψ
 β) Έστω ε_1 η εφαπτόμενη της C_f στο $A(x_1, f(x_1))$.
 Προφανώς η ε_1 θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon_1} = f'(x_1)$. Αν η ε_1 έχει και άλλο κοινό σημείο $B(x_2, f(x_2))$ με την γραφική παράσταση της f , τότε αν υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$ προφανώς εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής και άρα θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη ε_2 στο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ε_1



Επειδή οι δύο ευθείες είναι παράλληλες θα είναι $f'(x_1) = f'(\xi)$ άτοπο διότι η f' είναι 1-1

28.A2 8)

- α) Ψ
β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Είναι $f(0) = 0$. Όμως $|f(x)| = |x^2| = x^2$ η οποία προφανώς είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

28.A2 9)

- α) Α
β) Η $f(x) = x\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Στο $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ακόμη
- $$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = 0 \in \mathbb{R}$$
- Άρα η $f(x) = x\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$

28.A2 10)

- α) Ψ
β) Έστω συνάρτηση f κυρτή στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 . Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_0) = 0$. Ακόμη επειδή η f είναι κυρτή η f' θα είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\text{για κάθε } x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \stackrel{f'(x_0)=0}{\Rightarrow} f'(x) < 0$$

$$\text{για κάθε } x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \stackrel{f'(x_0)=0}{\Rightarrow} f'(x) > 0$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

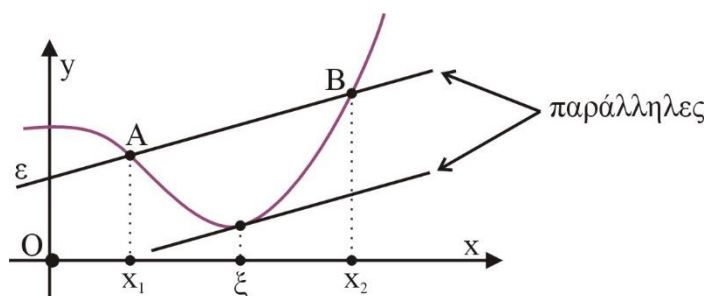
Άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

Άτοπο

Άρα δεν είναι δυνατόν η f να είναι κυρτή και να έχει μέγιστο στο x_0

28.A2 11)

- α) Α
β) Έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$, με $x_1 < x_2$, τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία ε



τότε

στο διάστημα $[x_1, x_2]$ προφανώς εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής και άρα θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ε

α) Α

β) Καταρχήν

ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει σίγουρα μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα διότι έχει σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$

αφού είναι συνεχής και θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ή

αντίστροφα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Έτσι

Η παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού θα είναι ένα πολυώνυμο που θα έχει βαθμό κατά ένα μικρότερο από τον βαθμό της συνάρτησης άρα θα είναι περιττού βαθμού. Άρα η παράγωγος της συνάρτησης θα έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα x_0 που σημαίνει ότι στο x_0 η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη