

27.1 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
 β) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως ρητή συνάρτηση
 γ) Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x - 2)'(x - 3) - (x^2 - x - 2)(x - 3)'}{(x - 3)^2} =$$

$$= \frac{(2x - 1)(x - 3) - (x^2 - x - 2)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} \stackrel{\Delta=16, x_1=1, x_2=5}{=} \frac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 3)^2}$$

Ο πίνακας μονοτονίας της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$		1 $\tau\mu$		9 $\tau\varepsilon$		

Ακόμη

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{(2x - 6)(x - 3)^2 - (x^2 - 6x + 5)2(x - 3)}{(x - 3)^4} =$$

$$= \frac{(x - 3)[(2x - 6)(x - 3) - 2(x^2 - 6x + 5)]}{(x - 3)^4} = \frac{8(x - 3)}{(x - 3)^4}$$

Ο πίνακας κυρτότητας της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f(x)$			

- δ) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ θα βρούμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - x - 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - x - 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3} = +\infty$$

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $x = 3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

- Οριζόντιες – πλάγιες ασύμπτωτες

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ψάχνουμε μόνο για πλάγιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - x - 2}{x - 3} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x + 2} = 2$$

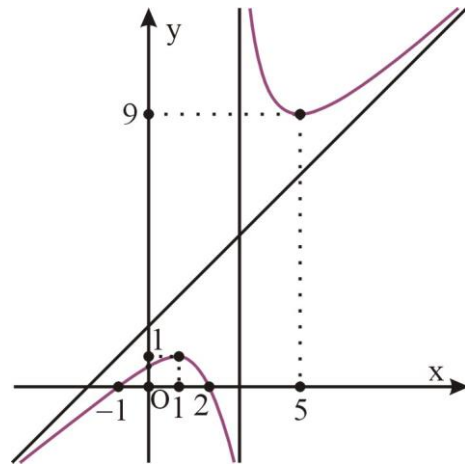
άρα η ευθεία $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

ομοίως η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$

ε) i) Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f''(x)$	-	-	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↘ 1 ↗ $-\infty$ τ.μ.			$+\infty$ ↘ 9 ↗ $+\infty$ τ.ε.	

iii) γραφική παράσταση



ii) Πίνακας τιμών

x	-1	0	1	2	5
f(x)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	9

27.1 2)

α) Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$

β) Μελέτη συνέχειας

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση

γ) i) Εύρεση f' και f''

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x) = 2$

ii) Πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\swarrow$ -1 $\searrow$ τοπικό ελάχιστο		

iii) Πίνακας κυρτότητας

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f(x)$	$\curvearrowright$	

δ) i) Όρια και τιμές στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ θα βρούμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

ii) Ασύμπτωτες

- Κατακόρυφες

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

- Οριζόντιες – πλάγιες

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Οπότε ψάχνουμε μόνο για πλάγιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $+\infty$

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $-\infty$

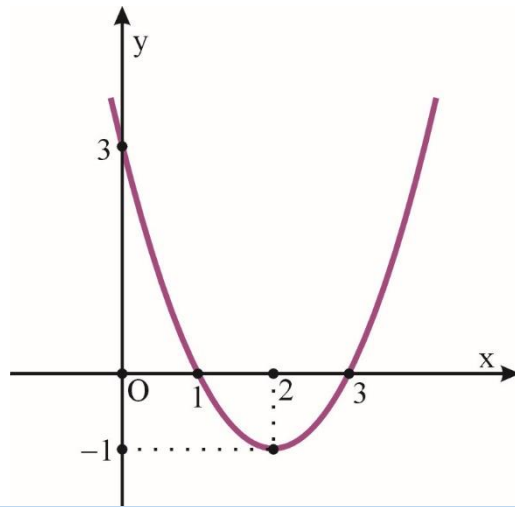
ε) i) Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+		+
f(x)	$+\infty$	9 T.E.	$+\infty$

ii) Πίνακας τιμών

x	0	1	2	3
f(x)	3	-1	0	0

iii) Χάραξη γραφικής παράστασης



27.1 3)

α) Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$

β) Μελέτη συνέχειας

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση

γ) i) Εύρεση f' και f''

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$x^2 - 4x + 3; \Delta = 4, x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4-2}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{4+2}{2} \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 12x + 9} = 3(x^2 - 4x + 3) = \\ = 3(x-1)(x-3)$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$\boxed{f''(x) = 6x - 12} = 6(x-2)$$

ii) Πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f(x)	↗ 4		↘ 0		↗

iii) Πίνακας κυρτότητας

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)	↪ (2, 2)		↪

δ) i) Όρια και τιμές στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ θα βρούμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

ii) Ασύμπτωτες

• Κατακόρυφες

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

• Οριζόντιες – πλάγιες

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Οπότε ψάχνουμε μόνο για πλάγιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $+\infty$

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $-\infty$

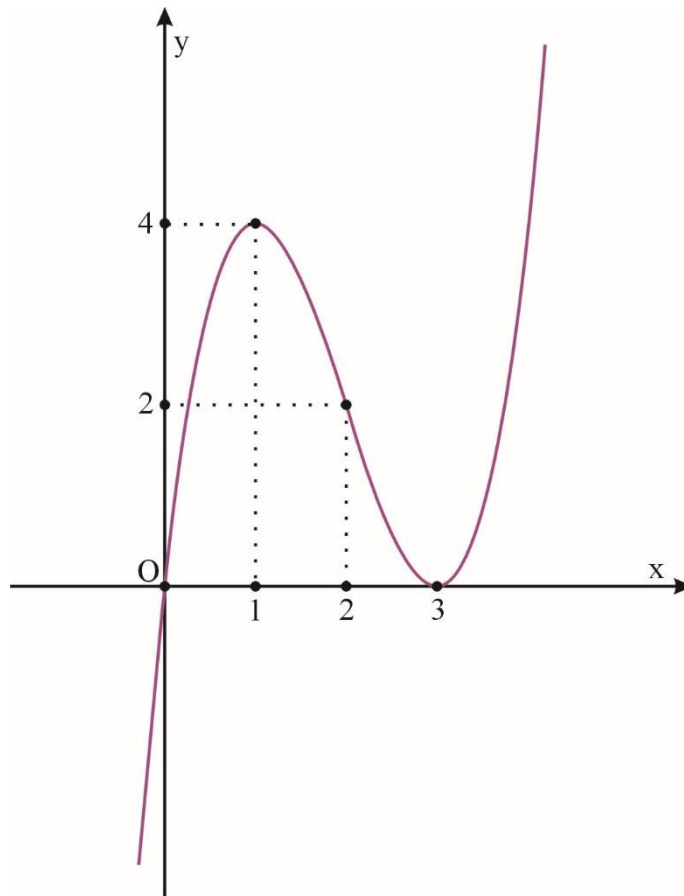
ε) i) Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	0	+	+	
f(x)	$-\infty$	4 T.M.	2 Σ.K.	0 T.E.	$+\infty$	

ii) Πίνακας τιμών

x	0	1	2	3
f(x)	0	4	2	0

iii) Χάραξη γραφικής παράστασης



27.1 4)

α) Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$

β) Μελέτη συνέχειας

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική συνάρτηση

γ) i) Εύρεση f' και f''

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3} = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με $\boxed{f''(x) = 6x}$

ii) Πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘	↗	
		$\boxed{4}$		$\boxed{0}$	

iii) Πίνακας κυρτότητας

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
f(x)			σημείο καμψής (0, 2)		

δ) i) Όρια και τιμές στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ θα βρούμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

ii) Ασύμπτωτες

• Κατακόρυφες

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

• Οριζόντιες – πλάγιες

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Οπότε ψάχνουμε μόνο για πλάγιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

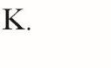
άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $+\infty$

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $-\infty$

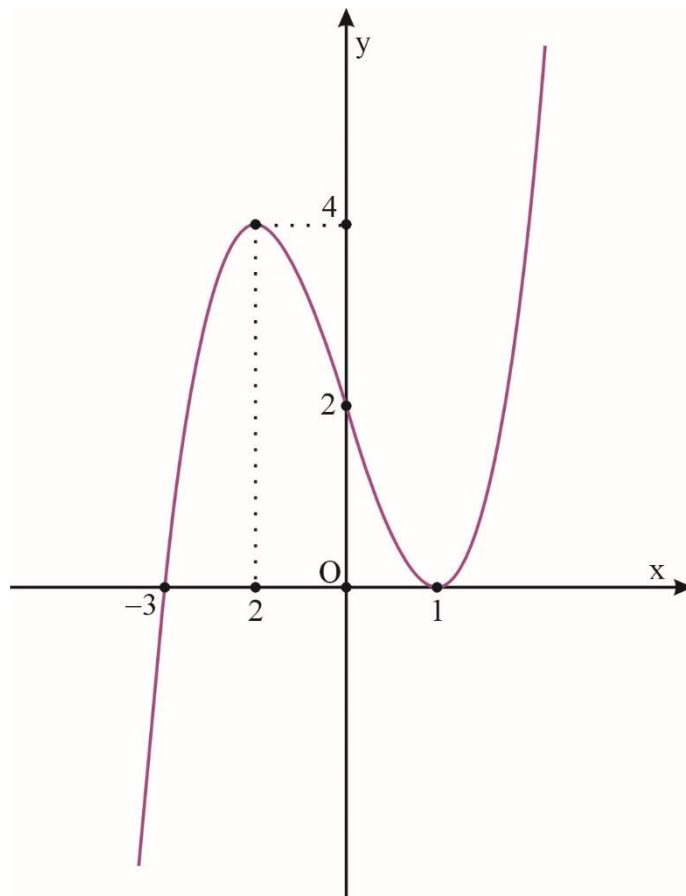
ε) i) Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
f'(x)	+	0	-	-	0	+			
f''(x)	-	-	0	+	+				
f(x)	$-\infty$		4 T.M.		2 Σ.Κ.		0 T.E.		$+\infty$

ii) Πίνακας τιμών

x	-2	-1	0	1
f(x)	0	4	2	0

iii) Χάραξη γραφικής παράστασης



27.1 5)

α) Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

β) Μελέτη συνέχειας

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως ρητή συνάρτηση

γ) i) Εύρεση f' και f''

Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{\cancel{2x} - 2 - \cancel{2x} - 1}{(x-1)^2} = \boxed{-\frac{3}{(x-1)^2}} \end{aligned}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{3}{(x-1)^4} \cdot 2(x-1) = \boxed{\frac{6(x-1)}{(x-1)^4}}$$

ii) Πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f(x)$					

iii) Πίνακας κυρτότητας

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-		+	
$f(x)$					

δ) i) Όρια και τιμές στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ θα βρούμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (-\infty) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = \boxed{2}$$

ii) Ασύμπτωτες

• Κατακόρυφες

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 1$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\boxed{x=1}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

• Οριζόντιες – πλάγιες

Στο $+\infty$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\boxed{y=2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

Στο $-\infty$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\boxed{y=2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$

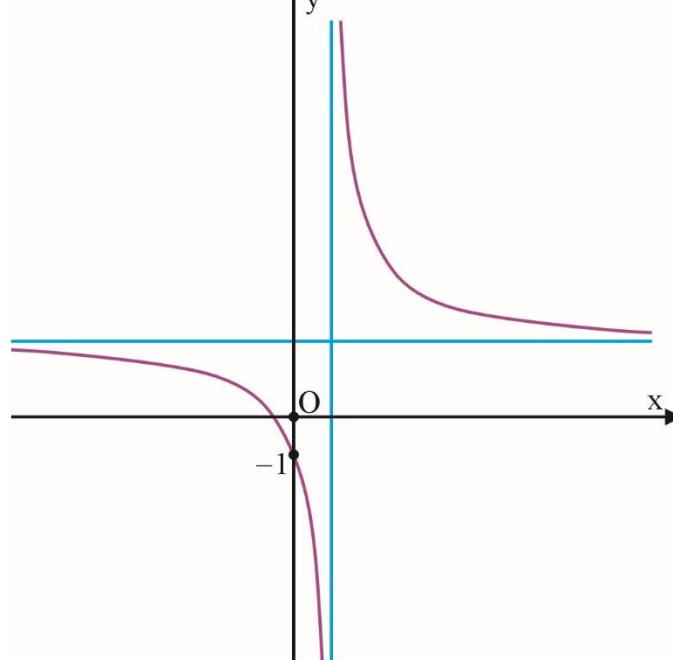
ε) i) Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f''(x)$	-		+
f(x)	2	$+\infty$	2

ii) Πίνακας τιμών

x	0
f(x)	-1

iii) Χάραξη γραφικής παράστασης



27.1 6)

α) Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

β) Μελέτη συνέχειας

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως ρητή συνάρτηση

γ) i) Εύρεση f' και f''

Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - \cancel{2x} + \cancel{2} - x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2}}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)(\cancel{2x^2} - \cancel{2x} - \cancel{2x} + 2 - \cancel{2x^2} + \cancel{4x})}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

ii) Πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

iii) Πίνακας κυρτότητας

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$\curvearrowright$		$\curvearrowleft$

δ) i) Όρια και τιμές στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ θα βρούμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2x + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

ii) Ασύμπτωτες

• Κατακόρυφες

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 1$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\boxed{x=1}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

• **Οριζόντιες – πλάγιες**

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Οπότε ψάχνουμε μόνο για πλάγιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x + 2 - \cancel{x^2} + x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = \boxed{-1}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = x - 1}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=1}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x + 2 - \cancel{x^2} + x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = \boxed{-1}$$

άρα η ευθεία $\boxed{y = x - 1}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$

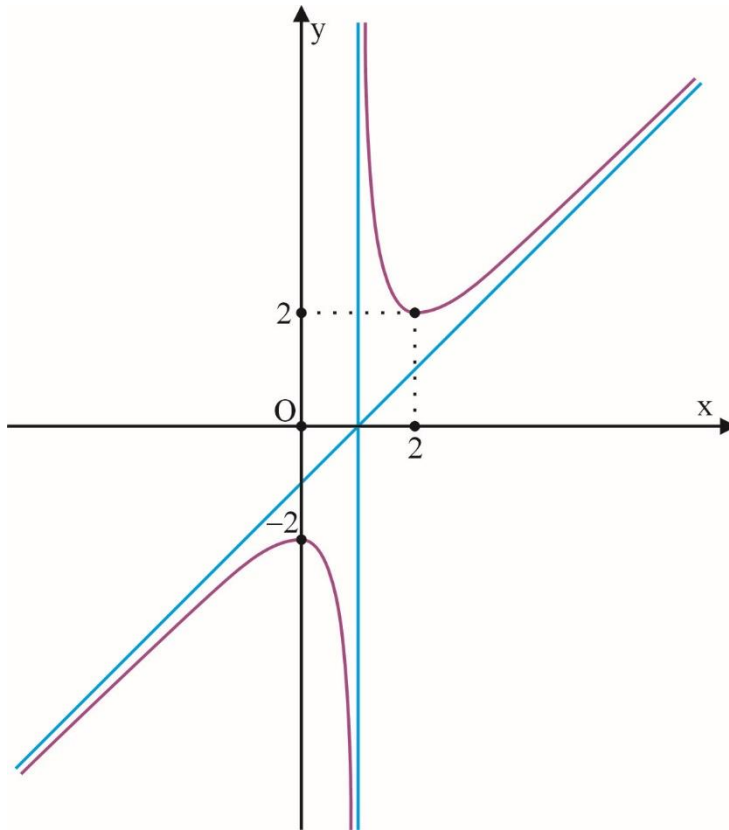
ε) **i) Πίνακας μεταβολών**

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f''(x)$	-	-	+	0	+
f(x)	$-\infty \rightarrow \boxed{-2} \text{ T.M.} \rightarrow -\infty$			$+\infty \rightarrow \boxed{2} \text{ T.E.} \rightarrow +\infty$	

ii) Πίνακας τιμών

x	0	2
f(x)	-2	2

iii) Χάραξη γραφικής παράστασης



27.1 7)

Είναι $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$. Οπότε

α) Πεδίο ορισμού

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

β) Μελέτη συνέχειας

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως ρητή συνάρτηση

γ) i) Εύρεση f' και f''

Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \cancel{2x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{-x-2}{x^3} = \boxed{-\frac{x+2}{x^3}}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με

$$f''(x) = -\frac{x^3 - (x+2)3x^2}{x^6} = -\frac{x^3 - 3x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{\cancel{2x^2}(x+3)}{x^4} =$$

$$= \boxed{\frac{2(x+3)}{x^4}}$$

ii) Πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
f(x)	$\nearrow$	$\boxed{\frac{3}{4}}$	$\searrow$	$\searrow$

iii) Πίνακας κυρτότητας

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	+
f(x)	$\curvearrowright$	σημείο καμπής $\boxed{(-3, \frac{7}{9})}$	$\curvearrowleft$	$\curvearrowleft$

δ) i) Όρια και τιμές στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ θα βρούμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = 1 \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = 1 \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$$

ii) Ασύμπτωτες

• Κατακόρυφες

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Οπότε ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 1$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\boxed{x = 0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

• Οριζόντιες – πλάγιες

Στο $+\infty$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\boxed{y = 1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

Στο $-\infty$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\boxed{y = 1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$

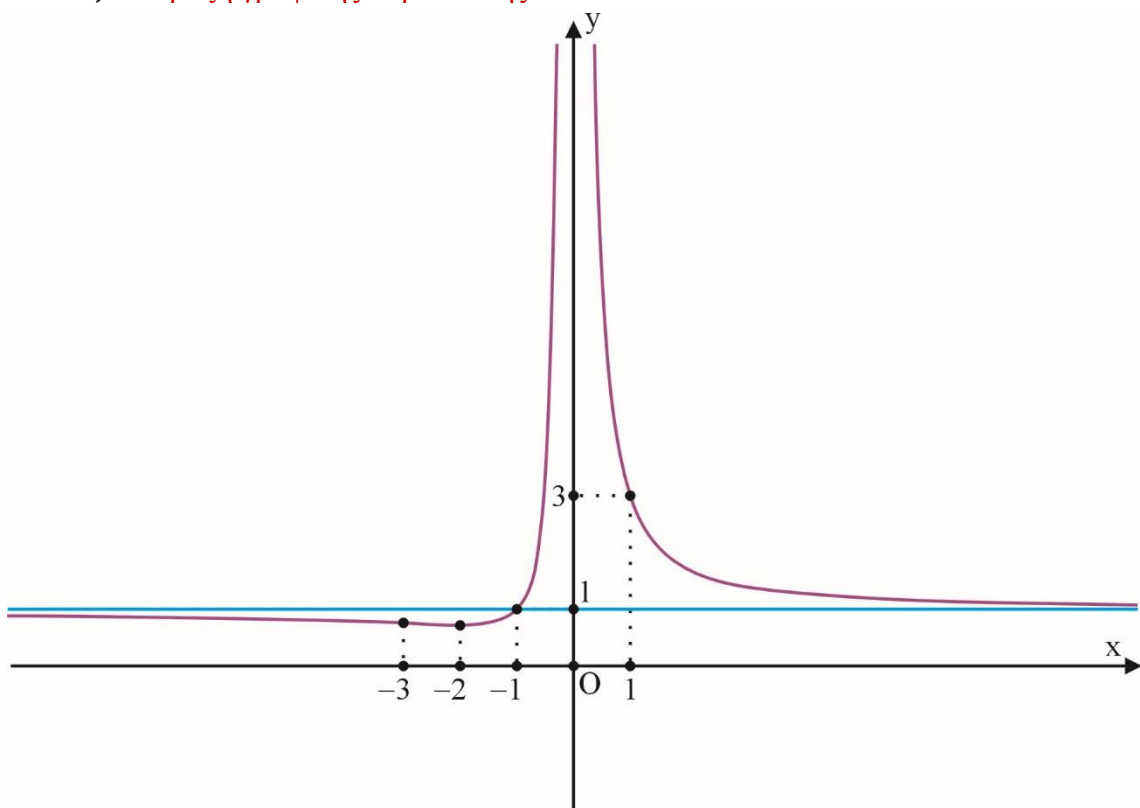
ε) i) Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+
f(x)					

ii) Πίνακας τιμών

x	-3	-2	-1	1
f(x)	$\frac{7}{9}$	$\frac{3}{4}$	1	3

iii) Χάραξη γραφικής παράστασης



27.1 8)

Είναι

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x) + 1 & , \text{ όταν } x^2 - 2x \geq 0 \\ -(x^2 - 2x) + 1 & , \text{ όταν } x^2 - 2x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & , \text{ όταν } x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ -x^2 + 2x + 1 & , \text{ όταν } x \in (0, 2) \end{cases}$$

Οπότε

α) **Πεδίο ορισμού**
 Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

β) **Μελέτη συνέχειας**

Η $f(x) = |x^2 - 2x| + 1$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

γ) **i) Εύρεση f' και f''**

Στο $x_0 = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 2x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}} = 2 \end{cases}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Στο $x_0 = 2$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 2x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = 0 \end{cases}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη ούτε στο $x_0 = 2$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & , \text{ όταν } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ -2x + 2 & , \text{ όταν } x \in (0, 2) \end{cases}$$

Οπότε προφανώς η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$ με

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ όταν } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ -2 & , \text{ όταν } x \in (0, 2) \end{cases}$$

ii) **Πίνακας μονοτονίας**

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	-	$\parallel$	+	0	-	$\parallel$	+
f(x)		$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$		
		$\boxed{1}$		$\boxed{2}$		$\boxed{1}$	

iii) **Πίνακας κυρτότητας**

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+		-		+
$f(x)$					

δ) **i) Όρια και τιμές στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού**
 Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ θα βρούμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \boxed{+\infty}$$

ii) **Ασύμπτωτες**

• **Κατακόρυφες**

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

• **Οριζόντιες – πλάγιες**

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Οπότε ψάχνουμε μόνο για πλάγιες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $+\infty$

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $-\infty$

ε) i) **Πίνακας μεταβολών**

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	-	+
$f''(x)$	-	-		+	+
f(x)					

ii) **Πίνακας τιμών**

x	0	1	2
f(x)	1	2	1

iii) Χάραξη γραφικής παράστασης

