

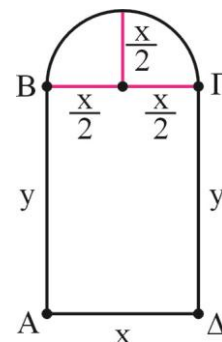
Έστω ότι το παράθυρο έχει βάση x και ύψος y όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Τότε το ημικύκλιο με διάμετρο $B\Gamma$, έχει

ακτίνα $\frac{x}{2}$

$$\text{μήκος } \frac{2\pi \frac{x}{2}}{2} = \frac{\pi x}{2}$$

$$\text{εμβαδό } \frac{\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi x^2}{8}$$



Ακόμη επειδή η συνολική περίμετρος του παραθύρου είναι 10 θα ισχύει

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 10 \Rightarrow 2y = 10 - x - \frac{\pi x}{2} \Rightarrow 2y = \frac{20 - 2x - \pi x}{2} \Rightarrow y = \frac{20 - 2x - \pi x}{4}$$

Ενώ το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει εμβαδό $x \cdot y$

Οπότε το εμβαδό του παραθύρου θα είναι

$$E = xy + \frac{\pi x^2}{8} \stackrel{y = \frac{20 - 2x - \pi x}{4}}{\Rightarrow} E(x) = x \frac{20 - 2x - \pi x}{4} + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{20x - 2x^2 - \pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow E(x) = \frac{40x - 4x^2 - 2\pi x^2 + \pi x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{40x - 4x^2 - \pi x^2}{2}, \quad x \in (0, 10)$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η $E(x)$

Η E είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0, 10)$ με

$$E'(x) = \frac{40 - 8x - 2\pi x}{2} = \frac{\cancel{2}(20 - 4x - \pi x)}{\cancel{2}} = 20 - x(4 + \pi)$$

$$\text{Οπότε η } E' \text{ μηδενίζεται στο } x_0 = \frac{20}{\pi + 4}$$

Τα πρόσημα της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$\frac{20}{\pi+4}$	10	$+\infty$
$E'(x)$			+	0	-
$E(x)$					

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο

$$x_0 = \frac{20}{\pi+4} \quad (\text{δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό})$$

Επομένως για να έχει το παράθυρο το μέγιστο εμβαδό θα πρέπει η μεγάλη βάση να έχει

βάση $\boxed{x = \frac{20}{\pi+4}}$

ύψος

$$\boxed{y} = \frac{20 - 2x - \pi x}{4} = \frac{20 - 2 \cdot \frac{20}{\pi+4} - \pi \cdot \frac{20}{\pi+4}}{4} = \frac{\cancel{20\pi} + 80 - 40 - \cancel{20\pi}}{4} = \frac{\overset{10}{\cancel{40}}}{\cancel{4}} = \boxed{\frac{10}{\pi+4}}$$