

25.25 1)

Έστω ότι το σημείο Α έχει συντεταγμένες

$$A(\alpha, 0), \alpha > 0$$

Τότε το Β θα έχει την **ίδια τετμημένη** με το Α, και επειδή είναι σημείο της C_f θα είναι

$$B(\alpha, f(\alpha)) \text{ δηλαδή } B(\alpha, 12 - \alpha^2)$$

Οπότε για το σημείο Γ, που θα έχει την **ίδια τεταγμένη** με το Β, θα είναι

$$\Gamma(x_\Gamma, 12 - \alpha^2). \text{ Και επειδή και το } \Gamma \text{ είναι σημείο της } C_f \text{ θα ισχύει}$$

$$f(x_\Gamma) = 12 - \alpha^2 \Rightarrow 12 - x_\Gamma^2 = 12 - \alpha^2 \Rightarrow -x_\Gamma^2 = -\alpha^2 \Rightarrow x_\Gamma^2 = \alpha^2 \Rightarrow x_\Gamma = \pm \alpha$$

Προφανώς $x_\Gamma \neq \alpha$, οπότε $x_\Gamma = -\alpha$, δηλαδή $\Gamma(-\alpha, 12 - \alpha^2)$

Τέλος το σημείο Δ έχει ίδια τετμημένη με το Γ. Οπότε είναι $\Delta(-\alpha, 0)$

Έτσι το εμβαδό Ε του ΑΒΓΔ είναι $E(\alpha) = 2\alpha \cdot (12 - \alpha^2) = -2\alpha^3 + 24\alpha, \alpha > 0$

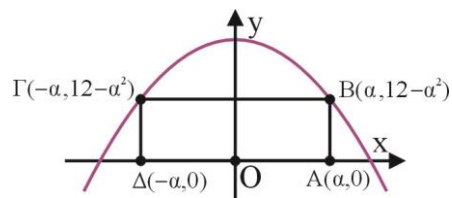
Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $E'(\alpha) = -6\alpha^2 + 24 = -6(\alpha^2 - 4), \alpha > 0$

Έτσι η $E'(\alpha)$ μηδενίζεται στο $\alpha = 2$

$$\text{με } E(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 = -16 + 48 = 32$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η Ε παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\alpha = 2$ ίσο με 32

Άρα το μέγιστο εμβαδό του ορθογωνίου είναι 32



α	0	2	$+\infty$
$E'(\alpha)$		+	-
$E(\alpha)$		32	

ολικό μέγιστο

25.25 2)

Έστω ότι το σημείο Α έχει συντεταγμένες

$$A(\alpha, 0), \alpha > 0$$

Τότε το Β θα έχει την **ίδια τετμημένη** με το Α, και επειδή είναι σημείο της C_f θα είναι

$$B(\alpha, f(\alpha)) \text{ δηλαδή } B(\alpha, 3 - \alpha^2)$$

Οπότε για το σημείο Γ, που θα έχει την **ίδια τεταγμένη** με το Β, θα είναι

$$\Gamma(x_\Gamma, 3 - \alpha^2). \text{ Και επειδή και το } \Gamma \text{ είναι σημείο της } C_f \text{ θα ισχύει}$$

$$f(x_\Gamma) = 3 - \alpha^2 \Rightarrow 3 - x_\Gamma^2 = 3 - \alpha^2 \Rightarrow -x_\Gamma^2 = -\alpha^2 \Rightarrow x_\Gamma^2 = \alpha^2 \Rightarrow x_\Gamma = \pm \alpha$$

Προφανώς $x_\Gamma \neq \alpha$, οπότε $x_\Gamma = -\alpha$, δηλαδή $\Gamma(-\alpha, 3 - \alpha^2)$

Τέλος το σημείο Δ έχει ίδια τετμημένη με το Γ. Οπότε είναι $\Delta(-\alpha, 0)$

Έτσι το εμβαδό Ε του ΑΒΓΔ είναι $E(\alpha) = 2\alpha \cdot (3 - \alpha^2) = -2\alpha^3 + 6\alpha, \alpha > 0$

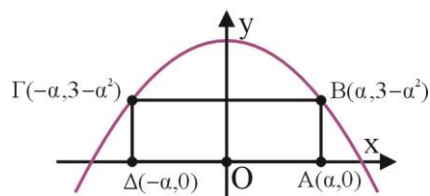
Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $E'(\alpha) = -6\alpha^2 + 6 = -6(\alpha^2 - 1), \alpha > 0$

Έτσι η $E'(\alpha)$ μηδενίζεται στο $\alpha = 1$

$$\text{με } E(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 = -2 + 6 = 4$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η Ε παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\alpha = 1$ ίσο με 4

Άρα το μέγιστο εμβαδό του ορθογωνίου είναι 4



α	0	1	$+\infty$
$E'(\alpha)$		+	-
$E(\alpha)$		4	

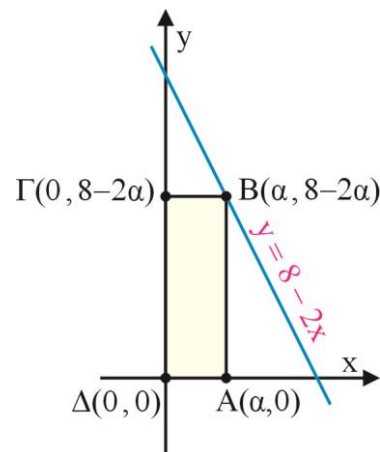
ολικό μέγιστο

Έστω ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες

$$A(\alpha, 0), \alpha > 0$$

Τότε το B θα έχει την ίδια τετμημένη με το A και επειδή είναι σημείο της $y = 8 - 2x$ θα έχει συντεταγμένες $B(\alpha, 8 - 2\alpha)$

Οπότε το σημείο Γ που θα έχει την ίδια τεταγμένη με το B και επειδή είναι σημείο του άξονα $y'y$ θα έχει συντεταγμένες $\Gamma(0, 8 - 2\alpha)$.



Τέλος το σημείο Δ προφανώς έχει συντεταγμένες $\Delta(0, 0)$

Έτσι το ορθογώνιο ABΓΔ έχει εμβαδό (εμβαδό = βάση · ύψος)

$$E(\alpha) = \alpha \cdot (8 - 2\alpha) \Rightarrow E(\alpha) = -2\alpha^2 + 8\alpha, \alpha > 0 \quad (\text{και } 8 - 2\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 4)$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η E

Η E ως πολωνομική είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$ με $E'(\alpha) = -4\alpha + 8 = -4(\alpha - 2)$, $\alpha > 0$

Έτσι η E' μηδενίζεται στο $\alpha = 2$ με $E(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \Rightarrow E(2) = 8$

Τα πρόσημα της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$E'(\alpha)$			+	-
$E(\alpha)$			8	

ολικό μέγιστο

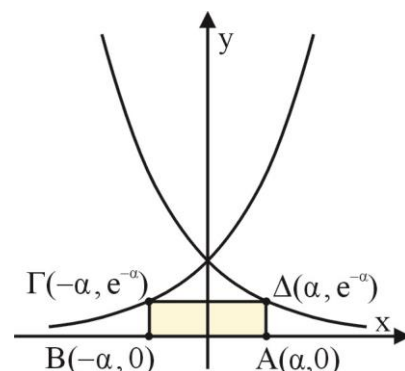
Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\alpha = 2$ ίσο με 8

Επομένως το μέγιστο εμβαδό του ορθογωνίου είναι 8

Έστω ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες

$$A(\alpha, 0), \alpha > 0$$

Τότε το Δ θα έχει την ίδια τετμημένη με το A και επειδή είναι σημείο της C_g θα έχει συντεταγμένες $\Delta(\alpha, g(\alpha))$ δηλαδή $\Delta(\alpha, e^{-\alpha})$



Οπότε το σημείο Γ που θα έχει την ίδια τεταγμένη με το Δ θα έχει συντεταγμένες $\Gamma(x_\Gamma, e^{-\alpha})$. Και επειδή και το Γ είναι σημείο της C_f θα ισχύει $f(x_\Gamma) = e^{-\alpha} \Rightarrow e^{x_\Gamma} = e^{-\alpha} \Rightarrow x_\Gamma = -\alpha$ δηλαδή $\Gamma(-\alpha, e^{-\alpha})$

Τέλος το σημείο B είναι σημείο του άξονα $x'x$ και έχει ίδια τετμημένη με το Γ . Οπότε το B έχει συντεταγμένες $B(-\alpha, 0)$

Έτσι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει εμβαδό (εμβαδό = βάση $\cdot$ ύψος)

$$E(\alpha) = 2\alpha \cdot e^{-\alpha}, \alpha > 0$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η E

Η E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$E'(\alpha) = 2e^{-\alpha} - 2\alpha e^{-\alpha} = 2e^{-\alpha}(1 - \alpha), \alpha > 0$$

Έτσι η E' μηδενίζεται στο $\alpha = 1$ με $E(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{-1} \Rightarrow E(1) = \frac{2}{e}$

Τα πρόσημα της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$E'(\alpha)$			+	-
$E(\alpha)$			$\frac{2}{e}$	
			ολικό μέγιστο	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\alpha = 1$ ίσο με $\frac{2}{e}$

Επομένως το μέγιστο εμβαδό του ορθογωνίου είναι $\frac{2}{e}$