

25.11 1)

α) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = e^x - ex$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^x - e. \text{ Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - e = 0 \Rightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1$$

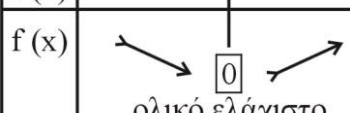
Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ με $f(1) = e^1 - e \cdot 1 = 0$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Επομένως η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 0

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - ex \geq 0 \Rightarrow e^x \geq ex$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

β) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων

συναρτήσεων, με $f'(x) = \ln x + 1$. Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = e^{-1}$ με $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = -e^{-1}$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f έχει ολικό μέγιστο ίσο με e^{-1}

Οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f(x) \geq e^{-1} \Rightarrow x \ln x \geq -\frac{1}{e} \Rightarrow x \ln x \geq -1$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

25.11 2)

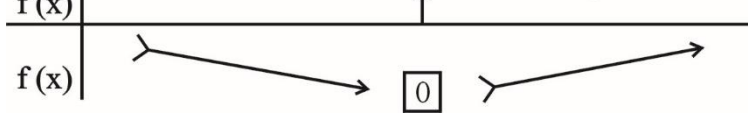
Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Η f στο $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = e^x - 1$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$ με $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Έτσι

$$\text{για κάθε } x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\text{για κάθε } x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\text{Άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x + 1$$

25.11 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - x + 1$, $x \in (0, +\infty)$

Η f στο $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ με $f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			+	-
$f(x)$			0	

Έτσι

$$\text{για κάθε } 0 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$\text{για κάθε } x \geq 1 \Rightarrow f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$\text{Άρα για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) \leq 0 \Rightarrow \ln x - x + 1 \leq 0 \Rightarrow \ln x \leq x - 1$$

25.11 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x - 2 \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

Η f στο $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 2$ με

$$f(2) = 2 - 2 \ln 2 = 2 - \ln 4$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα μονοτονίας

Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με $2 - \ln 4$

Οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$			$2 - \ln 4$	

$$f(x) \geq 2 - \ln 4 \Rightarrow x - 2 \ln x \geq 2 - \ln 4 \Rightarrow x - 2 \ln x \geq 0$$

$2 - \ln 4 > 0$
διότι
 $2 - \ln 4 > 0 \Leftrightarrow \ln e^2 - \ln 4 > 0$ που ισχύει αφού $e^2 > 4$

25.11 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^8 - 8x + 7$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 8x^7 - 8$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 8(x^7 - 1) = 0 \Rightarrow x^7 - 1 = 0 \Rightarrow x^7 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ με $f(1) = 1^8 - 8 \cdot 1 + 7 = 0$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Επομένως η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 0

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x^8 - 8x + 7 \geq 0 \Rightarrow x^8 \geq 8x - 7$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		0	

ολικό ελάχιστο

25.11 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 19$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x^3 - 2x^2 - x + 2) \stackrel{\text{παραγοντοποίηση με Horner ρίζα } x=1}{=} = 12(x-1)(x+1)(x-2)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 12(x-1)(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ στο $x_2 = 1$ και στο $x_3 = 2$

$$\text{με } f(-1) = 3(-1)^4 - 8(-1)^3 - 6(-1)^2 + 24(-1) + 19 = 3 + 8 - 6 - 24 + 19 = 0$$

$$f(1) = 3 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 19 = 3 - 8 - 6 + 24 + 19 = 32$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 19 = 27$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Επομένως η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 0

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 19 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x \geq -19$$

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+	
f(x)								
		↙	0	↗	32	↘	27	↗
			ολικό					
			ελάχιστο					

25.11 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) \stackrel{\text{παραγοντοποίηση με Horner ρίζα } x=1}{=} = 4(x-1)(x+1)(x-3)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ στο $x_2 = 1$ και στο $x_3 = 3$

$$\text{με } f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - 2(-1)^2 + 12(-1) + 9 = 0$$

$$f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 9 = 16$$

$$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 9 = 0$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Επομένως η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 0

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x \geq -9$$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$				16			
		0			0		
		ολικό			ολικό		
		ελάχιστο			ελάχιστο		

25.11 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x \in (0, +\infty)$

Η f στο $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x+1)(x-1)}{x} = 0 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Επομένως η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ με $f(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα μονοτονίας

Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1

Οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f(x) \geq 1 \Rightarrow x^2 - 2 \ln x \geq 1 \stackrel{1>0}{\Rightarrow} x^2 - 2 \ln x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \ln x$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$			$\swarrow$ 1 $\searrow$	

25.11 9)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^2 e^{4-x}$, $x \in (0, +\infty)$

Η f στο $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 2xe^{4-x} - x^2 e^{4-x} = xe^{4-x} (2-x)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 2$ με $f(2) = 2^2 e^{4-2} = 4e^2$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$			+ 0 -	
$f(x)$			$\swarrow$ $4e^2$ $\searrow$	

Έτσι

$$\text{για κάθε } 0 < x \leq 2 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(2) \Rightarrow f(x) \leq 4e^2$$

$$\text{για κάθε } x \geq 2 \stackrel{f' \searrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(2) \Rightarrow f(x) \leq 4e^2$$

$$\text{Άρα για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) \leq 4e^2 \Rightarrow x^2 e^{4-x} \leq 4e^2$$

25.11 10)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$

Η f στο $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}^2} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 4$ με $f(4) = \ln 4 - \sqrt{4} = \ln 4 - 2$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$			+ 0 -	
$f(x)$			$\swarrow$ $\ln 4 - 2$ $\searrow$	

Έτσι

$$\text{για κάθε } 0 < x \leq 4 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(4) \Rightarrow f(x) \leq \ln 4 - 2$$

$$\text{για κάθε } x \geq 4 \stackrel{f' \searrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(4) \Rightarrow f(x) \leq \ln 4 - 2$$

$$\text{Άρα για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) \leq \ln 4 - 2 \Rightarrow \ln 4 - 2 = \ln 4 - \ln e^2 = \ln \frac{4}{e^2} < 0 \Rightarrow \ln x - \sqrt{x} < 0 \Rightarrow \ln x \leq \sqrt{x}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 4x^2 - 4\ln(2x+1)$, $x \in [0, +\infty)$

Η f στο $[0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 8x - \frac{4}{2x+1} \cdot 2 = \frac{8x(2x+1) - 8}{2x+1} = \frac{8(2x^2 + x - 1)}{2x+1}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 1: \Delta = 9 \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-3}{4} \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-1+3}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \frac{8(x+1)(2x-1)}{2x+1} \end{aligned}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = \frac{1}{2}$ με

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\ln\left(2\frac{1}{2} + 1\right) = 4\frac{1}{4} - 4\ln 2 = 1 - \ln 2^4 = 1 - \ln 16$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$			$\emptyset$	
			$-$	$+$
$f(x)$				

Έτσι

$$\text{για κάθε } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{f(x) \geq 1 - \ln 16}$$

$$\text{για κάθε } x \geq \frac{1}{2} \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{f(x) \geq 1 - \ln 16}$$

$$\text{Άρα } \boxed{\text{για κάθε } x \geq 0} \text{ είναι } f(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{4x^2 - 4\ln(2x+1) \geq 1 - \ln 16}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \varepsilon\phi x + \sigma\phi x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η f στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu^2 x} = \frac{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu^2 x}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = \frac{\pi}{4}$ με

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} + \sigma\phi \frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$					

Έτσι

$$\text{για κάθε } 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f(x) \geq 2$$

$$\text{για κάθε } x \geq \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f(x) \geq 2$$

$$\text{Άρα για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι } f(x) \geq 2 \Rightarrow \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x \geq 2$$

25.11 13)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^{xe} \Rightarrow f(x) = e^{\ln x^{xe}} \Rightarrow f(x) = e^{xe \ln x}$, $x \in (0, +\infty)$

Η f στο $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = e^{xe \ln x} \left(e \ln x + x \cancel{e} \frac{1}{x} \right) = e^{xe \ln x} e (\ln x + 1)$$

$$\text{Η } f' \text{ μηδενίζεται στο } x_0 = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ με } f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα μονοτονίας

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$			

ολικό ελάχιστο

Έτσι

$$\text{για κάθε } 0 < x \leq \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{e}$$

$$\text{για κάθε } x \geq \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{e}$$

$$\text{Άρα για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) \geq \frac{1}{e} \Rightarrow x^{ex} \geq \frac{1}{e} \Rightarrow ex^{ex} \geq 1$$