

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

23.8 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x} \stackrel{2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)}{=} \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \stackrel{\Delta=9}{\Rightarrow} x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{απορρίπτεται}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$			$\nearrow$	$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως πηλίκο

$$\text{παραγωγίσιμων συναρτήσεων με } f'(x) = \frac{\cancel{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \ln e \Rightarrow x = e$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$			$\nearrow$	$\searrow$	

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$

23.8 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Rightarrow} x = -1$$

Προφανώς είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

23.8 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Rightarrow 1-x \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

23.8 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x+1)}{x} = 0 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

23.8 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \ln x + 1$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	e^{-1}	$+\infty$	
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-1}]$

γνησίως αύξουσα στο $[e^{-1}, +\infty)$

23.8 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 \ln x + 1) \stackrel{x>0}{\Rightarrow} \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$			$\searrow$	$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$

γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

23.8 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,1) \cup (1,+\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1) \cup (1,+\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$			-	-	+
$f(x)$			$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$

γνησίως φθίνουσα στο $(1,e]$

γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$

23.8 8)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$			$\searrow$	$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

23.8 9)

Είναι $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$. Οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x \ln x} (\ln x + 1) = 0 \xrightarrow{e^{x \ln x} > 0} \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$				

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-1}]$

γνησίως αύξουσα στο $[e^{-1}, +\infty)$

23.8 10)

Είναι $f(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln x \ln x} = e^{\ln^2 x}$. Οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^{\ln^2 x} \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow e^{\ln^2 x} \frac{2 \ln x}{x} = 0 \xrightarrow{e^{\ln^2 x} > 0} 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$				

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$