

23.4 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με

$$f'(x) = (x-5)^3 + 3(x-1)(x-5)^2 = (x-5)^2 [x-5+3(x-1)] =$$

$$= (x-5)^2 (4x-8) = 4(x-5)^2 (x-2)$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow 4(x-5)^2 (x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$ ή $x = 5$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με

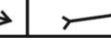
$$f'(x) = 3(x+1)^2 (x+8)^4 + 4(x+1)^3 (x+8)^3 =$$

$$= (x+1)^2 (x+8)^3 [3(x+8) + 4(x+1)] = (x+1)^2 (x+8)^3 (3x+24+4x+4) =$$

$$= (x+1)^2 (x+8)^3 (7x+28) = 7(x+1)^2 (x+8)^3 (x+4)$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow 7(x+1)^2 (x+8)^3 (x+4) = 0 \Rightarrow x = -8$ ή $x = -4$ ή $x = -1$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-8	-4	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -8]$ γνησίως φθίνουσα στο $[-8, -4]$

και γνησίως αύξουσα στο $[-4, +\infty)$

23.4 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική με

$$f'(x) = (x-3)^2 + 2x(x-3) = (x-3)(x-3+2x) = (x-3)(3x-3) = 3(x-3)(x-1)$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 3$ ή $x = 1$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$

γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

23.4 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+9)(x-7)^2 + 2(x+9)^2(x-7) = (x+9)(x-7)[2(x-7) + 2(x+9)] = \\ &= (x+9)(x-7)(2x-14+2x+18) = (x+9)(x-7)(4x-4) = \\ &= 4(x+9)(x-7)(x-1) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 4(x+9)(x-7)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -9 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 7$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-9	-1	7	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	+
$f(x)$						

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -9]$

γνησίως αύξουσα στο $[-9, -1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 7]$

γνησίως αύξουσα στο $[7, +\infty)$

23.4 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-3)(8-x)^3 - 3(x-3)^2(8-x)^2 = (x-3)(8-x)^2[2(8-x) - 3(x-3)] = \\ &= (x-3)(8-x)^2(16-2x-3x+9) = (x-3)(8-x)^2(-5x+25) = \\ &= -5(x-3)(8-x)^2(x-5) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -5(x-3)(8-x)^2(x-5) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } x = 5 \text{ ή } x = 8$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	3	5	8	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$

γνησίως αύξουσα στο $[3, 5]$

γνησίως φθίνουσα στο $[5, +\infty)$

Ο μηδενισμός της f' στο $x_0 = 8$ δεν επηρεάζει την μονοτονία της f

23.4 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-6)^2(x+4)^3 + 3(x-6)^3(x+4)^2 = 3(x-6)^2(x+4)^2(x+4+x-6) = \\ &= 6(x-6)^2(x+4)^2(x-1) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x-6)^2(x+4)^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 6$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-4		1		6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘			↗			

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Ο μηδενισμός της f' στο $x_1 = -4$ καθώς και στο $x_2 = 6$ δεν επηρεάζει την μονοτονία της f

23.4 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(2x-1)^3 + 6x^2(2x-1)^2 = 2x(2x-1)^2(2x-1+3x) = \\ &= 2x(2x-1)^2(5x-1) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(2x-1)^2(5x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{5} \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗		

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{5}\right]$

γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$

Ο μηδενισμός της f' στο $x_1 = \frac{1}{2}$ δεν επηρεάζει την μονοτονία της f

23.4 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-1)^2$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(x^2-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	+	+
$f(x)$	↘		↗		

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Ο μηδενισμός της f' στο $x_1 = -1$ καθώς και στο $x_2 = 1$ δεν επηρεάζει την μονοτονία της f