

23.2 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$ γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 1]$

και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με $f'(x) = -6x^2 + 30x - 36$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 30x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$

και γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$

23.2 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

23.2 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f'(x) = -3x^2 - 2x - 1$.

Είναι $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$. Επομένως είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

23.2 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 72$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 72 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+7}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{-1-7}{2} \Rightarrow x_2 = -4 \end{cases}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f(x)					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -4]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-4, 3]$

γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

23.2 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 3x^2 + 4x + 7$.

Είναι $\Delta = 16 - 84 = -68 < 0$. Επομένως είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

23.2 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 9$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f(x)					

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$

γνησίως αύξουσα στο $[-1, 3]$

γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$

23.2 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού το R. Είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική, με $f'(x) = -3x^2 - 12x - 12$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 - 12x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Delta = 144 - 4 \cdot (-3) \cdot (-12) = 0 \quad x = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$$

Επομένως είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = -2$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R