

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) Αν $\alpha < \beta < 0$ τότε

στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι $|x| = -x$ οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} x|x|dx = \int_{\alpha}^{\beta} -x^2dx = \left[-\frac{x^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} = -\frac{\beta^3}{3} + \frac{\alpha^3}{3} = \frac{1}{3} [(-\beta)^3 - (-\alpha)^3] =$$

$$\begin{matrix} \alpha < 0 \Rightarrow -\alpha = |\alpha| \\ \beta < 0 \Rightarrow -\beta = |\beta| \end{matrix} \left[\frac{1}{3} (|\beta|^3 - |\alpha|^3) \right]$$

β) Αν $\alpha < 0 \leq \beta$ τότε

στο διάστημα $[\alpha, 0]$ είναι $|x| = -x$ και

στο διάστημα $[0, \beta]$ είναι $|x| = x$

οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} x|x|dx = \int_{\alpha}^0 x|x|dx + \int_0^{\beta} x|x|dx = \int_{\alpha}^0 -x^2dx + \int_0^{\beta} x^2dx = \left[-\frac{x^3}{3} \right]_{\alpha}^0 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\beta} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{\alpha^3}{3} \right) + \frac{\beta^3}{3} = \frac{\beta^3}{3} + \frac{\alpha^3}{3} = \frac{1}{3} [\beta^3 - (-\alpha)^3] \begin{matrix} \alpha < 0 \Rightarrow -\alpha = |\alpha| \\ \beta > 0 \Rightarrow \beta = |\beta| \end{matrix} = \left[\frac{1}{3} (|\beta|^3 - |\alpha|^3) \right]$$

γ) Αν $0 \leq \alpha < \beta$ τότε

στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι $|x| = x$ οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} x|x|dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3} = \frac{1}{3} (\beta^3 - \alpha^3) \begin{matrix} \alpha > 0 \Rightarrow \alpha = |\alpha| \\ \beta > 0 \Rightarrow \beta = |\beta| \end{matrix} = \left[\frac{1}{3} (|\beta|^3 - |\alpha|^3) \right]$$

Οπότε τελικά σε κάθε περίπτωση είναι $\int_{\alpha}^{\beta} x|x|dx = \frac{1}{3} (|\beta|^3 - |\alpha|^3)$