31.55 1)

$$\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}} \eta\mu(\ln x)\,dx \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\ln x \Rightarrow x=e^y \Rightarrow dx=e^y dy \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=\ln 1=0 \\ \text{για } x=e^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow y=\ln e^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y \eta\mu y\,dy$$

Οπότε τώρα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y \eta\mu y\,dy$. Είναι

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y \eta\mu y\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(e^y\right)' \eta\mu y\,dy=\left[e^y \eta\mu y\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y\left(\eta\mu y\right)' dy=$$

$$=e^{\frac{\pi}{4}}\eta\mu\frac{\pi}{4}-e^0\eta\mu 0-\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y \sigma\upsilon\nu y\,dy=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y \sigma\upsilon\nu y\,dy=$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(e^y\right)' \sigma\upsilon\nu y\,dy=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}-\left(\left[e^y \sigma\upsilon\nu y\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y\left(\sigma\upsilon\nu y\right)' dy\right)=$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}-\left(e^{\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-e^0\sigma\upsilon\nu 0-\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y\left(-\eta\mu y\right) dy\right)=$$

$$=\cancel{\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}}-\cancel{\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y \eta\mu y\,dy=$$

$$=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^y \eta\mu y\,dy=1-I$$

Επομένως

$$I=1-I \Rightarrow 2I=1 \Rightarrow I=\frac{1}{2}$$

31.55 2)

$$\int_{e^{-\frac{\pi}{4}}}^1 \sigma\upsilon\nu(\ln x)\,dx \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\ln x \Rightarrow x=e^y \Rightarrow dx=e^y dy \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=\ln 1=0 \\ \text{για } x=e^{-\frac{\pi}{4}} \Rightarrow y=\ln e^{-\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}}}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^y \sigma\upsilon\nu y\,dy$$

Οπότε τώρα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^y \sigma\upsilon\nu y\,dy$. Είναι

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^y \sigma\upsilon\nu y\,dy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(e^y\right)' \sigma\upsilon\nu y\,dy=\left[e^y \sigma\upsilon\nu y\right]_{-\frac{\pi}{4}}^0-\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^y\left(\sigma\upsilon\nu y\right)' dy=$$

$$=e^0\sigma\upsilon\nu 0-e^{-\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^y\left(-\eta\mu y\right) dy=1-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^y \eta\mu y\,dy=$$

$$=1-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(e^x\right)' \eta\mu y\,dy=1-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}+\left[e^y \eta\mu y\right]_{-\frac{\pi}{4}}^0-\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^y\left(\eta\mu y\right)' dy$$

$$=1-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}+e^{0}\eta\mu 0-e^{-\frac{\pi}{4}}\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}e^{y}\sigma\upsilon\nu y\,dy=$$

$$=1-\cancel{\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}}+\cancel{\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}e^{y}\sigma\upsilon\nu y\,dy=1-I$$

Επομένως

$$I=1-I\Rightarrow 2I=1\Rightarrow I=\frac{1}{2}$$