

$$\alpha) \int_{-a}^a f(x) dx \stackrel{f: \text{περιττή} \Rightarrow f(x) = -f(-x)}{=} \int_{-a}^a -f(-x) dx \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y = -x \Rightarrow dy = -dx \\ \text{για } x = -a \Rightarrow y = a \\ \text{για } x = a \Rightarrow y = -a}}{=} \int_a^{-a} y f(y) dy =$$

$$= - \int_{-a}^a f(x) dx$$

Άρα

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_{-a}^a f(x) dx \Rightarrow 2 \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\beta) \text{ Θεωρούμε την συνάρτηση } f: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \sin x \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, είναι

$$f(-x) = \sin(-x) \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \stackrel{\sin(-x) = -\sin x}{=} -\sin x \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \sin x \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} =$$

$$= -\sin x \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι περιττή και άρα με βάση το α) ερώτημα θα είναι

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin x \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 0$$