Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

31.50

α) Έστω. Τότε $I=\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)\,dx$

$$I=\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)\,dx=\int_0^{\pi} xf(\eta\mu(\pi-x))\,dx \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\pi-x\Rightarrow x=\pi-x\\ dx=-dy\\ \text{για } x=0\Rightarrow y=\pi\\ \text{για } x=\pi\Rightarrow y=0}}{=} -\int_{\pi}^{0}(\pi-y)f(\eta\mu y)\,dy=$$

$$=\int_0^{\pi} \pi f(\eta\mu y)-yf(\eta\mu y)\,dy=\int_0^{\pi} \pi f(\eta\mu y)\,dy-\int_0^{\pi} yf(\eta\mu y)\,dy=$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu y)\,dy-I$$

Επομένως

$$I=\pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu y)\,dy-I\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu y)\,dy\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu y)\,dy$$

β) Με βάση το α) ερώτημα έχουμε

$$\int_0^{\pi} x\eta\mu^3x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\eta\mu^3x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\eta\mu^2x\eta\mu x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\sigma\upsilon\nu^2x)\eta\mu x\,dx=$$

$$\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow dy=-\eta\mu x dx\\ \text{για } x=0\Rightarrow y=\sigma\upsilon\nu 0=1\\ \text{για } x=\pi\Rightarrow y=\sigma\upsilon\nu\pi=-1}}{=} -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}(1-y^2)\,dy=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy=\frac{\pi}{2}\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left(-1-\frac{-1}{3}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)=-\frac{\pi}{2}\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$