31.49

Έστω $I=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$. Τότε

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx \overset{f(x)=f(\alpha+\beta-x)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} xf(\alpha+\beta-x)dx \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\alpha+\beta-x\Rightarrow x=\alpha+\beta-y\\ \Rightarrow dx=-dy\\ \text{για } x=\alpha\Rightarrow y=\alpha+\beta-\alpha=\beta\\ \text{για } x=\beta\Rightarrow y=\alpha+\beta-\beta=\alpha}}{=} -\int_{\beta}^{\alpha}(\alpha+\beta-y)f(y)dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(\alpha+\beta)f(y)-yf(y)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(\alpha+\beta)f(y)dx-\int_{\alpha}^{\beta}yf(y)dx=(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}f(y)dx-I$$

Επομένως

$$I=(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}f(y)dx-I\Rightarrow 2I=(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}f(y)dx\Rightarrow I=\frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f(y)dx$$