

31.43 1)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) Αν $\alpha \geq 0$ τότε

στο διάστημα $[0, \alpha]$ είναι $|x| = x$ οπότε

$$\int_0^\alpha |x| dx = \int_0^\alpha x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha^2}{2} - 0 = \frac{\alpha \cdot \alpha}{2} \stackrel{\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha = |\alpha|}{=} \frac{\alpha \cdot |\alpha|}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \alpha \cdot |\alpha|}$$

β) Αν $\alpha < 0$ τότε

στο διάστημα $[\alpha, 0]$ είναι $|x| = -x$ οπότε

$$\int_0^\alpha |x| dx = \int_0^\alpha -x dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha = -\frac{\alpha^2}{2} - 0 = \frac{-\alpha \cdot \alpha}{2} \stackrel{\alpha < 0 \Rightarrow -\alpha = |\alpha|}{=} \frac{|\alpha| \cdot \alpha}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \alpha \cdot |\alpha|}$$

Οπότε τελικά για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι $\int_0^\alpha |x| dx = \frac{1}{2} \alpha |\alpha|$

31.43 2)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) Αν $\alpha \geq 0$ τότε

στο διάστημα $[0, \alpha]$ είναι $|x| = x$ οπότε

$$\int_0^\alpha x|x| dx = \int_0^\alpha x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha^3}{3} - 0 = \frac{\alpha^2 \cdot \alpha}{3} \stackrel{\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha = |\alpha|}{=} \frac{\alpha^2 \cdot |\alpha|}{3} = \boxed{\frac{1}{3} \alpha^2 \cdot |\alpha|}$$

β) Αν $\alpha < 0$ τότε

στο διάστημα $[\alpha, 0]$ είναι $|x| = -x$ οπότε

$$\int_0^\alpha x|x| dx = \int_0^\alpha -x^2 dx = \left[-\frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha = -\frac{\alpha^3}{3} - 0 = \frac{\alpha^2 \cdot (-\alpha)}{3} \stackrel{\alpha < 0 \Rightarrow -\alpha = |\alpha|}{=} \frac{\alpha^2 \cdot |\alpha|}{3} = \frac{1}{3} \alpha^2 \cdot |\alpha|$$

Οπότε τελικά για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι $\int_0^\alpha x|x| dx = \boxed{\frac{1}{3} \alpha^2 |\alpha|}$

31.43 3)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) Αν $\alpha \geq 0$ τότε

στο διάστημα $[0, \alpha]$ είναι $|x| = x$ οπότε

$$\int_0^\alpha (x + |x|)^2 dx = \int_0^\alpha (x + x)^2 dx = \int_0^\alpha 4x^2 dx = \left[\frac{4x^3}{3} \right]_0^\alpha = \frac{4\alpha^3}{3} - 0 = \frac{2\alpha^2 \cdot 2\alpha}{3} =$$

$$= \frac{2\alpha^2 \cdot (\alpha + \alpha)}{3} \stackrel{\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha = |\alpha|}{=} \frac{2\alpha^2 \cdot (\alpha + |\alpha|)}{3} = \boxed{\frac{2}{3} \alpha^2 (\alpha + |\alpha|)}$$

β) Αν $\alpha < 0$ τότε

στο διάστημα $[\alpha, 0]$ είναι $|x| = -x$ οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^{\alpha} (x + |x|)^2 dx = \int_0^{\alpha} (x - x)^2 dx = 0 \\ \text{όμως} \\ \frac{2}{3} \alpha^2 (\alpha + |\alpha|) \stackrel{\alpha < 0 \Rightarrow |\alpha| = -\alpha}{=} \frac{2}{3} \alpha^2 (\alpha - \alpha) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^{\alpha} (x + |x|)^2 dx = \boxed{\frac{2}{3} \alpha^2 (\alpha + |\alpha|)}$$

$$\text{Οπότε τελικά σε κάθε περίπτωση είναι } \int_0^{\alpha} (x + |x|)^2 dx = \frac{2}{3} \alpha^2 (\alpha + |\alpha|)$$